n を 3 以上の自然数とする．当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある．くじを引いて，当たりなら持ち点に 1 を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする．最初の持ち点は 0 とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す．k を 0 以上の整数とする．n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする．

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてもよい．

(3) $p(k)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める．値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ．

(19 北海道大 後 理・工 1)

【答】

(1) $p_n(k)=\begin{cases} {}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき}) \\ 0 & (k\geqq n+1 \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$

(3) 1 と 2

【解答】

(1) 1 回の試行において，当たりくじを引く確率は $\dfrac{2}{n}$，はずれくじを引く確率は $1-\dfrac{2}{n}$ である．n 回の試行終了時点の持ち点 k は $n+1$ 以上とならないことに注意すると，持ち点が k $(\geqq 0)$ となる確率 $p_n(k)$ は

$$\boldsymbol{p_n(k)=\begin{cases} {}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき}) \\ 0 & (k\geqq n+1 \text{ のとき}) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) k は定数で，$n\to\infty$ のときを考えるので，$0\leqq k\leqq n$ としてよい．このとき (1) の結果より

$$\begin{aligned} p_n(k) &= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \\ &= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \\ &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{2}{n-2}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \\ &= \frac{2^k}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(n-2)^k}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \\ &= \frac{2^k}{k!}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-2}\cdots\frac{n-k+1}{n-2}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \\ &= \frac{2^k}{k!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdots\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{2^k}{k!}\cdot 1^k \cdot e^{-2} = \boldsymbol{\frac{2^k}{k!}e^{-2}} \qquad \cdots\cdots（答）$$

(3) $p(k) = \dfrac{2^k}{k!}e^{-2}$ $(k \geqq 0)$ であり

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1} \quad (k \geqq 0)$$

であるから

$k=0$ のとき，$\dfrac{p(k+1)}{p(k)} > 1$ より　　$p(k) < p(k+1)$

$k=1$ のとき，$\dfrac{p(k+1)}{p(k)} = 1$ より　　$p(k) = p(k+1)$

$k \geqq 2$ のとき，$\dfrac{p(k+1)}{p(k)} < 1$ より　　$p(k) > p(k+1)$

すなわち

$$p(0) < p(1), \quad p(1) = p(2), \quad p(2) > p(3) > p(4) > \cdots$$

であるから，$p(k)$ が最大となるような k の値は　**1 と 2**　である．　　　　　　……（答）