1 から 8 までの番号をつけた 8 枚のカードが袋の中に入っている．袋の中からカードを 1 枚取り出してもとに戻すという操作を 4 回繰り返し，1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に取り出されたカードの番号をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 積 $abcd$ が奇数となる確率 P_1 を求めよ．
(2) $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4) \neq 0$ となる確率 P_2 を求めよ．
(3) $a+b+c+d=7$ となる確率 P_3 求めよ．
(4) $(a-1)(b-2)+cd=0$ となる確率 P_4 を求めよ．

(19 宇都宮大 教・工・地デ・農 1)

【答】

(1) $P_1 = \dfrac{1}{16}$
(2) $P_2 = \dfrac{2401}{4096}$
(3) $P_3 = \dfrac{5}{1024}$
(4) $P_4 = \dfrac{1}{256}$

【解答】

(1) 積 $abcd$ が奇数となるのは

「$a,\ b,\ c,\ d$ がすべて奇数」

のときである．よって

$$P_1 = \left(\frac{4}{8}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4) \neq 0$ となるのは

「$a \neq 1$ かつ $b \neq 2$ かつ $c \neq 3$ かつ $d \neq 4$」

のときである．よって

$$P_2 = \left(1-\frac{1}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{2401}{4096}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $a+b+c+d=7$ となるような 4 数の組は

$\{1,\ 1,\ 1,\ 4\},\ \{1,\ 1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 2,\ 2\}$

のときであるから，$a+b+c+d=7$ となる組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$${}_4\mathrm{C}_1 + \frac{4!}{2!1!1!} + {}_4\mathrm{C}_1 = 4+12+4 = 20 \text{（通り）}$$

ある．よって

$$P_3 = \frac{20}{8^4} = \boldsymbol{\frac{5}{1024}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $$(a-1)(b-2)+cd=0 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

となるのは，$a-1 \geqq 0$，$b-2 \geqq -1$，$cd \geqq 1$ であることに注意すると

$$b-2=-1 \text{ かつ } a-1=cd \ (\geqq 1)$$

のときであり

$$b=1 \text{ かつ } a \geqq 2$$

が必要である．このとき $(*)$ は

$$cd=a-1$$

となる．

$a=2$ のとき，$cd=1$ より，$(c,\ d)=(1,\ 1)$ の 1 通り
$a=3$ のとき，$cd=2$ より，$(c,\ d)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の 2 通り
$a=4$ のとき，$cd=3$ より，$(c,\ d)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の 2 通り
$a=5$ のとき，$cd=4$ より，$(c,\ d)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の 3 通り
$a=6$ のとき，$cd=5$ より，$(c,\ d)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の 2 通り
$a=7$ のとき，$cd=6$ より，$(c,\ d)=(1,\ 6),\ (2,\ 3), (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の 4 通り
$a=8$ のとき，$cd=7$ より，$(c,\ d)=(1,\ 7),\ (7,\ 1)$ の 2 通り

であり，$(*)$ を満たす組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$1+2+2+3+2+4+2=16 \text{（通り）}$$

ある．よって

$$P_4=\frac{16}{8^4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{256}} \qquad \cdots\cdots\text{（答）}$$

である．