**1** 円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = 5,\ \mathrm{BC} = 4,\ \mathrm{CD} = 4,\ \mathrm{DA} = 2$$

とする。また，対角線 AC と BD の交点を P とおく。

(1) 三角形 APB の外接円の半径を $R_1$, 三角形 APD の外接円の半径を $R_2$ とするとき，$\dfrac{R_1}{R_2}$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

**2** 次の関数のグラフに関する以下の問いに答えよ。ただし，$m$ は実数とする。

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときのグラフの概形をかけ。

(2) グラフと $x$ 軸の共有点の個数を求めよ。

**3** 正の約数の個数がちょうど $m$ 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを $d_m$ とする。

(1) $d_5$ を求めよ。

(2) $d_{15}$ を求めよ。

**4** コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを1枚ずつ3つの箱A, B, Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚，箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚，箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚，箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, Bいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。

**5** 三角形 ABC において $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

**6** $a$ は 0 でない実数とし，$f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ とおく。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ $C$ と 導関数 $y = f'(x)$ のグラフ $C'$ が相異なる 3 点で交わるような $a$ の範囲を求めよ。

(2) $a$ が (1) の範囲にあるとき $C$ と $C'$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

**7** $a_1 = 3,\ a_2 = 2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$ が成り立つような自然数 $n$ を求めよ。

**8** 三角形 ABC は $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$AD = 15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A = \angle BAC$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

**9** コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを1枚ずつ3つの箱A, B, Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚，箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚，箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚，箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B, Cいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱Aを開けるとちょうど2枚のコインが入っていた。このとき箱Bにコインがちょうど2枚入っている確率を求めよ。

**10** 座標平面上の円 $C$ は，点 $(0, 0)$ を通り，中心が直線 $x+y=0$ 上にあり，さらに双曲線 $xy=1$ と接する。このとき，円 $C$ の方程式を求めよ。ただし，円と双曲線がある点で接するとは，その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

**11** $n$ を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta \, d\theta$ を $n$ の式で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta \, d\theta$ を求めよ。

**12** 数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする。$k = 1, 2, \cdots$ に対し，$k$ 回目にさいころを振ったとき，1, 2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3, 4 が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5, 6 が出たら移動しないとする。$n$ 回さいころを振った後の点 P の座標を $X_n$ とする。

(1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。

(3) $\ell$ は $n$ 未満の正の整数とする。このとき，$\dfrac{1}{2^\ell} < X_n$ となる確率を求めよ。

**13** $a$ は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq (2a+3)x - a(a+3) \end{cases}$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま，$x$ 座標も $y$ 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1) $n$ を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) 任意の実数 $a$ について，$D(a)$ に含まれる格子点の個数と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。