

数 学

《解答にさいしての注意》

1. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
2. **2 ~ 6** は選択問題である。2つを選んで解答し、選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
3. 解答用紙には、答えだけでなく途中の計算も書くこと。

(必須問題)

- 1** 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 1$, $AD = 2$ とする。このとき、次の問いに答えよ。
- $\angle ABC$ の大きさを求めよ。
 - AC の長さを求めよ。
 - 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。
 - 四角形 ABCD が内接する円の半径 R を求めよ。

(選択問題)

- 2** a, b を実数とし、 $s = a + b$, $t = ab$ とおく。
- $a > 0$ かつ $b > 0$ である必要十分条件は $s > 0$ かつ $t > 0$ であることを示せ。
 - $a > 3$ かつ $b > 3$ である必要十分条件を s, t を用いて表せ。

3 放物線 $C: y = x^2 - 1$ 上の点 $(\alpha, \alpha^2 - 1)$ における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし $\alpha \neq 0$ とする。

- (i) 直線 l の方程式を求めよ。
- (ii) 直線 l と x 軸の交点を $(\beta, 0)$ とするとき、 β を α を用いて表せ。
- (iii) $\alpha > 1$ ならば $1 < \beta < \alpha$ となることを示せ。

4 連立方程式

$$\begin{cases} xy = 3^6 & \cdots \cdots (1) \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{6}{5} & \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

について、次の問いに答えよ。

- (i) $\log_3 x + \log_3 y$ の値を求めよ。
- (ii) 連立方程式 (1), (2) を満たす x, y の値を求めよ。

5 n を正の整数とする。 $n^2 - n + 4$ が 5 で割り切れることと、 n を 5 で割った余りが 3 であることは同値であることを証明せよ。

6 奇数の数列を

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, 23, 25, 27, 29 \mid 31, \dots$$

のように、第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき、次の問いに答えよ。

- (i) 第 n 群の最初の奇数を求めよ。
- (ii) 2019 は第何群の何番目の数か。