

数 学

《解答にさいしての注意》

1. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
2. **2～6** は選択問題である。2つを選んで解答し、選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
3. 解答用紙には、答えだけでなく途中の計算も書くこと。

(必須問題)

- 1** p を実数とする。2次関数 $f(x) = -x^2 + px + p$ について、次の問いに答えよ。
- $f(x)$ の最大値を $M(p)$ とおく。 $M(p)$ を p の式で表せ。
 - $M(p)$ の最小値と、そのときの p の値を求めよ。
 - $-4 < p < -3$ とする。 x が整数の値をとるとき、 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(選択問題)

- 2** 半径1の円に内接する正三角形の面積と外接する正三角形の面積を求めよ。

3 実数 x が $x > 1$ かつ $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$ を満たすとき、次の式の値を求めよ。

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(ii) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

(iii) $x - \frac{1}{x}$

4 関数 $y = 3 \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値と最小値を求めよ。

5 袋の中に 1 から 5 までの数字が書かれたボールが 5 個入っている。袋からボールを 1 個取り出して、書かれている数字を記録し、袋に戻すことを繰り返す。記録した数字の合計が 5 以上になったところでこの操作を終了する。このとき、次の問いに答えよ。

(i) ボールを取り出す回数が 1 回目で終了する確率を求めよ。

(ii) ボールを取り出す回数が 2 回目で終了する確率を求めよ。

(iii) 1 が書かれたボールを取り出したところで終了する取り出し方は何通りか求めよ。

(iv) 終了するまでに最も多くボールを取り出す回数とその確率を求めよ。

6 平面上の三角形 ABC の頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} とする。このとき、次の問いに答えよ。

(i) 三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル \vec{g} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(ii) 辺 BC, CA, AB 上に $BP : PC = CQ : QA = AR : RB$ を満たすように点 P, Q, R をとるとき、三角形 PQR の重心は三角形 ABC の重心と一致することを示せ。