1 n を3以上の自然数とする。当たりくじ2本を含む n 本のくじがある。くじを引いて，当たりなら持ち点に1を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする。最初の持ち点は0とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す。

k を0以上の整数とする。n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする。

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} p_n(k)$ を求めよ。ただし，e を自然対数の底とするとき，$\lim_{n \to \infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてもよい。

(3) $p(k) = \lim_{n \to \infty} p_n(k)$ と定める。値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ。

2 a，t は実数で，a は1以上とする。座標平面上の3点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(a, a-1)$，$\mathrm{P}(t, t^2+1)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を (X, Y) とする。

(1) X と Y を，a と t を用いて表せ。

(2) $a=1$ とする。t が実数全体を動くとき，G の軌跡を求め，座標平面上に図示せよ。

(3) a が1以上の実数全体を，t が実数全体を動くとき，G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ。

3 rを正の実数とする。複素数平面上に，点αを中心とする半径rの円Cがある。ただし，Cは原点を通らないものとする。点zが円C上を動くとき，点$w=\dfrac{1}{z}$の描く図形をC'とする。

(1) C'は円であることを示せ。さらに，C'の中心と半径をαとrで表せ。

(2) CとC'が一致するとき，Cの中心αは実軸上または虚軸上にあることを示せ。

4 関数$f(x)=\sqrt{x^2-1}\quad(x\geqq 1)$と関数$g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\quad(t\geqq 0)$を考える。ただし，$e$は自然対数の底とする。

(1) $g(t)\geqq 1$を示せ。

(2) $a>0$とする。定積分$\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt$を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線$y=f(x)$をCとする。$p>1$とし，C上の点$(p,\ f(p))$における接線をℓとする。このとき，曲線C，直線ℓ，x軸で囲まれた図形の面積Sをpで表せ。