第 1 問 (40 点)

曲線 $x^2 - y^2 = -4$ のうち $y > 0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

問 2　$x = e^t - e^{-t}$, $y = e^t + e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

問 3　p を正の数とし，C 上の点 $(p, \sqrt{p^2+4})$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

問 4　$\lim_{p\to\infty}(S(p) - a\log p) = 0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

第 2 問 (40 点)

自然数 n に対して，多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ を

$$P_1(x) = x, \qquad Q_1(x) = 1$$
$$P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) + (x^2 - 1)\,Q_n(x)$$
$$Q_{n+1}(x) = P_n(x) + x\,Q_n(x)$$

で定める．θ を実数とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　$P_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, $Q_n(\cos\theta)\sin\theta = \sin n\theta$ となることを数学的帰納法により示せ．

問 2　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx$ を求めよ．

問 3　$P_n'(x) = n\,Q_n(x)$ となることを示せ．

第 3 問 （40 点）

関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

が成り立つことを示せ．

問 2　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問 1 において $x = g(t)$, $a = \displaystyle\int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ．

第 4 問 (40 点)

α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする．自然数 n に対して，$3^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n，小数部分を b_n とする．b_n が条件

$$n \text{ が奇数のとき，} \quad \frac{1}{3} \leqq b_n < \frac{2}{3}$$

$$n \text{ が偶数のとき，} \quad 0 \leqq b_n < \frac{1}{3}$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，実数 x に対して，x の整数部分が a，小数部分が b であるとは，a が整数であり，$0 \leqq b < 1$ であって $x = a + b$ と表されることをいう．

問 1　k を自然数とするとき，b_{2k+1} を b_{2k} を用いて表せ．

問 2　k を自然数とするとき，b_{2k} を b_{2k-1} を用いて表せ．

問 3　α を求めよ．

第 5 問 (40 点)

a, c を正の実数, b を複素数とする. すべての複素数 z に対して, 不等式

$$a|z|^2 + (bz + \overline{bz}) + c \geqq 0$$

が成り立っているとする. 以下の問いに答えよ.

問 1　不等式 $|b|^2 - ac \leqq 0$ が成り立つことを示せ.

問 2　すべての複素数 z に対して, 不等式

$$a|z|^2 + (bz + \overline{bz}) + c \leqq (a+c)(1+|z|^2)$$

が成り立つことを示せ.