数　学（数学科・物理学科）

第 1 問（100 点）

曲線 $x^2 - y^2 = -4$ のうち $y > 0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

問 2　$x = e^t - e^{-t}$, $y = e^t + e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

問 3　p を正の数とし，C 上の点 $(p, \sqrt{p^2+4})$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

問 4　$\lim_{p\to\infty}(S(p) - a\log p) = 0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

数　学（数学科）

第 2 問（100 点）

関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

が成り立つことを示せ．

問 2　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問 1 において $x = g(t)$，$a = \displaystyle\int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ．

数　学（数学科）

第 3 問（100 点）

6 つの面が次の規則に従って点滅するサイコロがある．

(1) 各時刻に点灯している面は 1 つである．

(2) 時刻 $k+1$ に点灯する面は，時刻 k で点灯していた面に隣接する 4 つの面のうちのどれか 1 つで，点灯する確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

問 1　時刻 0 で点灯していた面と，時刻 n に点灯している面が同じである確率 p_n を求めよ．

問 2　$0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対し，時刻 k に点灯している面の数字を a_k とすると，数列 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ が得られる．このとき，$a_0 = a_n$ となる数列は全部で何通りの可能性があるか答えよ．

数　学（数学科）

第 4 問（100 点）

自然数 m と互いに素な m 以下の自然数の個数を $\phi(m)$ と表す.

問 1　p を素数，n を自然数とするとき，$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ を示せ.

以下の設問では，$m_1, m_2, \cdots\cdots, m_6, h$ を，次の (1), (2) を満たす自然数とする.

(1) $m_1 < m_2 < \cdots\cdots < m_6 < h$

(2) h と互いに素な h 未満の自然数は集合 $\{m_1, m_2, \cdots\cdots, m_6\}$ に属する.

このとき，次の問いに答えよ．ただし，m と n が互いに素な自然数であるとき，$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ が成立することは使ってよい.

問 2　h は 11 以上の素数で割り切れないことを示せ.

問 3　$m_2 = 4$ のとき h を求めよ.

数　学（数学科）

第 5 問（100 点）

a，c を正の実数，b を複素数とする．すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2 + (bz + \overline{bz}) + c \geqq 0$$

が成り立っているとする．以下の問いに答えよ．

問 1　不等式 $|b|^2 - ac \leqq 0$ が成り立つことを示せ．

問 2　すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2 + (bz + \overline{bz}) + c \leqq (a+c)(1+|z|^2)$$

が成り立つことを示せ．