第 1 問 （50 点）

原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(c,\ d)$ が与えられていて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(k > 0)$ とする．また，$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$ とする．次の問いに答えよ．

問 1　k を c，d を用いて表せ．

問 2　点 P が直線 $2x + y - 6 = 0$ 上を動くとき，点 Q はある円 C 上を動く．円 C の方程式を求めよ．

問 3　問 2 において，点 P が直線 $2x + y - 6 = 0$ 上を $(0, 6)$ から $(3, 0)$ まで動くとき，円 C 上で点 Q の動く範囲を図示せよ．

第 2 問 （50 点）

放物線 $C : y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(-b < a < 0 < b)$ をとる．点 A，B における放物線 C の接線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点を P とする．また，直線 AB と x 軸のなす角を α，接線 m と x 軸のなす角を β とする．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．次の問いに答えよ．

問 1　直線 AB と接線 m の方程式を a，b を用いて表せ．

問 2　$\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$ のとき，a を b を用いて表せ．

問 3　$\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\angle\mathrm{BAP} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，a，b の値を求めよ．

第 3 問 （50 点）

k は実数とする．O を原点とする座標空間内に 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1),\quad \mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1),\quad \mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$$

をとり，四面体 OABC を考える．次の問いに答えよ．

問 1　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ．

問 2　$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ とし，辺 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P，辺 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を k，s，t を用いて表せ．

問 3　P と Q は問 2 の内分点とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるとき，P と Q の座標を求めよ．

第 4 問 （50 点）

a は実数とする．$y = x^3 - 2x^2 + x$ が定める曲線 C と $y = ax$ が定める直線 ℓ を考える．次の問いに答えよ．

問 1　曲線 C と直線 ℓ が異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ．

問 2　曲線 C と直線 ℓ が異なる 3 点で交わるとき，それらの x 座標を 0，α，β として，$0 < \alpha < \beta$ が成り立っているとする．$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ．