a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

(19 東北大 理 2 文 2)

【答】

(1) $0<a<1$ のとき，$x=7$，　$a>1$ のとき，$x=9,\ 10,\ 11$

(2) $n \geqq 3$

【解答】

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x) \qquad \cdots\cdots (*)$$

真数 >0 より

$$\begin{cases} x-n>0 \\ 2n-x>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad n<x<2n \qquad \cdots\cdots ①$$

このとき

$$(*) \iff \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \qquad \cdots\cdots (*)'$$

(1) $n=6$ のとき,「① かつ $(*)'$」は

$$\begin{cases} 6<x<12 & \cdots\cdots ② \\ \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(i) $0<a<1$ のとき

$$③ \iff (x-6)^2 < 12-x$$
$$x^2-11x+24<0$$
$$(x-3)(x-8)<0$$
$$\therefore \quad 3<x<8$$

②も満たす整数 x は

$$x=7$$

(ii) $a>1$ のとき

$$③ \iff (x-6)^2 > 12-x$$
$$(x-3)(x-8)>0$$
$$\therefore \quad x<3,\ 8<x$$

②も満たす整数 x は

$$x=9,\ 10,\ 11$$

以上，(i)，(ii) より

$0<a<1$ のとき，$x=7$，　$a>1$ のとき，$x=9,\ 10,\ 11$ ……(答)

(2) (i) $0 < a < 1$ のとき

$$(*)' \iff (x-n)^2 < 2n - x$$
$$x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n < 0$$

$f(x) = x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n$ とおくと，$y = f(x)$ の軸の方程式は $x = n - \dfrac{1}{2}$ であり，区間 ① において $f(x)$ は単調増加である．

$f(x) < 0$ を満たす整数 x が ① の範囲に存在するための条件は，x が ① の範囲の整数を動くとき

$$(f(x) \text{ の最小値}) < 0$$

を満たすこと，すなわち

$$f(n+1) < 0$$

である．ここで

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)^2 + (1-2n)(n+1) + n^2 - 2n \\ &= -n + 2 \end{aligned}$$

であるから，求める条件は

$$-n + 2 < 0 \qquad \therefore \quad 2 < n$$

n は正の整数より　$n \geqq 3$

(ii) $a > 1$ のとき

$$(*)' \iff (x-n)^2 > 2n - x$$
$$x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n > 0$$

(i) の $f(x)$ を用いると，上式は $f(x) > 0$ である．

$f(x) > 0$ を満たす整数 x が ① の範囲に存在するための条件は，x が ① の範囲の整数を動くとき

$$(f(x) \text{ の最大値}) > 0$$

を満たすこと，すなわち

$$f(2n-1) > 0$$

である．ここで

$$\begin{aligned} f(2n-1) &= (2n-1)^2 + (1-2n)(2n-1) + n^2 - 2n \\ &= n(n-2) \end{aligned}$$

であるから，求める条件は

$$n(n-2) > 0 \qquad \therefore \quad n < 0,\ 2 < n$$

n は正の整数より　$n \geqq 3$

(i)，(ii) いずれのときも，求める条件は

$\boldsymbol{n \geqq 3}$ ……(答)

である．