θ は，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ を満たすとする．このとき，

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \boxed{\text{ア}},\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \sin\theta+\cos\theta = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

(19 自治医大 看護)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ
-8	-1	8	$-\sqrt{3}$	2

【解答】

分母を有理化すると

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{3-5} = \frac{8-2\sqrt{15}}{-2} = \sqrt{15}-4,$$

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{15}-4} = \frac{\sqrt{15}+4}{15-16} = -\sqrt{15}-4$$

であるから

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = (\sqrt{15}-4)+(-\sqrt{15}-4) = \boxed{-8} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots (\text{アの答})$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，① の左辺は

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

であり，① を変形すると

$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -8$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{8}} \qquad \cdots\cdots (\text{イ，ウの答})$$

また

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\\ &= 1 + 2\sin\theta\cos\theta\\ &= 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

ここで，$\tan\theta = \sqrt{15}-4$ であるから $-1 < \tan\theta < 0$ であり，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とあわせると，$135^\circ < \theta < 180^\circ$ である．したがって

$$0 < \sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad -1 < \cos\theta < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり $-1 < \sin\theta + \cos\theta < 0$ である．

$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\boxed{-\sqrt{3}}}{\boxed{2}} \qquad \cdots\cdots (\text{エ，オの答})$$