$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とするとき，等式 $\cos 4\theta = \cos 2\theta$ を満たす θ の値をすべて求めよ．

(19 名古屋市大 経 7(2))

【答】 $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

【解答】

$$\cos 4\theta = \cos 2\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

① に 2 倍角の公式を用いると

$$2\cos^2 2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$2\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 = 0$$

$$(\cos 2\theta - 1)(2\cos 2\theta + 1) = 0$$

$$\therefore \quad \cos 2\theta = 1,\ -\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$ だから

$$2\theta = 0,\ 2\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq 4\theta \leqq 4\pi$ である．

  (i) $0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$0 \leqq 4\theta \leqq 2\pi$ であり，① の解は

  $$4\theta = 2\theta,\ 2\pi - 2\theta \qquad \therefore \quad \theta = 0,\ \frac{\pi}{3}$$

  (ii) $\pi \leqq 2\theta \leqq 2\pi$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right)$ のとき，$2\pi \leqq 4\theta \leqq 4\pi$ であり，① の解は

  $$4\theta = (2\pi - 2\theta) + 2\pi,\ 2\theta + 2\pi \qquad \therefore \quad \theta = \frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

  (i)，(ii) より

  $$\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

  である．

- 差を積に直す公式を用いると，① は

  $$\cos 4\theta - \cos 2\theta = 0$$

  $$-2\sin 3\theta \sin\theta = 0$$

  $$\therefore \quad \sin 3\theta = 0 \text{ または } \sin\theta = 0$$

  $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$0 \leqq 3\theta \leqq 3\pi$ であり

  $$3\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \text{ または } \theta = 0,\ \pi$$

  $$\therefore \quad \theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

  である．