n を正の整数とする．

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\left\{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

(2) 次の方程式の解 x をすべて求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=0$$

(19 東北大 後 理 2)

【答】

(1) 略

(2) $x=\begin{cases}\dfrac{2l\pi}{n} & (l \text{ は } n \text{ の倍数でない整数}) \\ \dfrac{(2l+1)\pi}{n+1} & (l \text{ は整数})\end{cases}$

【解答】

(1) $$\left\{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

積を和に直す公式を用いると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sin\frac{x}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos(kx)\sin\frac{x}{2}\right\}\\&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right\}\\&=\sin\frac{x}{2}+\left\{\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)\right.\\&\qquad+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)\\&\qquad+\cdots\\&\qquad\left.+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right\}\\&=\sin\frac{x}{2}+\left\{-\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\end{aligned}$$

したがって，①が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- 数学的帰納法を用いてもよい．

  (i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(1+2\cos x)\sin\frac{x}{2}\\&=\sin\frac{x}{2}+\left\{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)-\sin\frac{x}{2}\right\} \quad (\because \text{ 積を和に直す公式})\\&=\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

  $n=1$ のとき ① は成り立つ．

(ii) $n=m$ のとき①が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}&\left\{1+2\sum_{k=1}^{m+1}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2}\\ &=\left\{1+2\sum_{k=1}^{m}\cos\ (kx)\right\}\sin\frac{x}{2}+2\cos((m+1)x)\sin\frac{x}{2}\\ &=\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)+\left\{\sin\left(\left(m+\frac{3}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)\right\}\\ &\qquad(\because\ \text{帰納法の仮定，積を和に直す公式})\\ &=\sin\left(\left(m+\frac{3}{2}\right)x\right)\end{aligned}$$

よって，$n=m+1$ のときも ① は成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して ① は成り立つ．

(2) (1) の等式より

$$2\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}$$

(i) $\sin\frac{x}{2}\fallingdotseq 0$ $\left(\frac{x}{2}\fallingdotseq m\pi\ (m\text{ は整数}),\ \text{すなわち } x\fallingdotseq 2m\pi\right)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=0\iff\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=\sin\frac{x}{2}$$

解は

$$\begin{aligned}&\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\frac{x}{2}+2l\pi,\ \pi-\frac{x}{2}+2l\pi\quad(l\text{ は整数})\\ &\therefore\quad nx=2l\pi,\quad(n+1)\pi=\pi+2l\pi\\ &\therefore\quad x=\frac{2l\pi}{n},\quad\frac{(2l+1)\pi}{n+1}\end{aligned}$$

$x\fallingdotseq 2m\pi$ とあわせると

$$x=\begin{cases}\dfrac{2l\pi}{n} & (l\text{ は }n\text{ の倍数でない整数})\\[2mm] \dfrac{(2l+1)\pi}{n+1} & (l\text{ は整数})\end{cases}$$

(ii) $\sin\frac{x}{2}=0$ ($x=2m\pi,\ m$ は整数) のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n}\cos(2km\pi)=\sum_{k=1}^{n}1=n\fallingdotseq 0$$

$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=0$ となる x は存在しない．

(i)，(ii) より，求める解は

$$\boldsymbol{x=\begin{cases}\dfrac{2l\pi}{n} & (l\text{ は }n\text{ の倍数でない整数})\\[2mm] \dfrac{(2l+1)\pi}{n+1} & (l\text{ は整数})\end{cases}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

- (i) の方程式

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}=0$$

を和を積に直す公式を用いて解いてもよい.

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}=0\\
&2\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{n}{2}x=0\\
\therefore\quad &\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)=0 \text{ または } \sin\frac{n}{2}x=0\\
&\frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+l\pi \text{ または } \frac{n}{2}x=l\pi\\
\therefore\quad &x=\frac{(2l+1)\pi}{n+1} \text{ または } x=\frac{2l\pi}{n}
\end{aligned}$$

以下,【解答】と同じ.