点 $(0,\ -1)$ と点 $(0,\ 1)$ をそれぞれ A と B で表す．直線 $L : y = ax + b$ は点 A を通り，直線 L と曲線 $C : y = x^2$ は共有点 $\mathrm{D}(x_1,\ y_1)$ と共有点 $\mathrm{E}(x_2,\ y_2)$ をもつ．三角形 ABD の外接円の面積を S_1 とし，三角形 ABE の外接円の面積を S_2 とする．また，$\angle\mathrm{DAB}$ の大きさを θ で表し，$0 < x_1 \leqq x_2$ とする．次の各問に答えなさい．

(1) (i) b の値を求めなさい．
(ii) a を x_1 の式で表しなさい．
(iii) a の値の範囲を求めなさい．

(2) $x_1 = x_2$ とする．
(i) x_1 と y_1 の値をそれぞれ求めなさい．
(ii) 線分 AD の長さを求めなさい．
(iii) $\tan\theta$ と $\tan 2\theta$ の値をそれぞれ求めなさい．

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2}$ とする．
(i) $y_1,\ x_2,\ y_2$ および $\sin\theta$ の値をそれぞれ求めなさい．
(ii) 線分 BD と線分 BE の長さをそれぞれ求めなさい．
(iii) 三角形 ABD の外接円の方程式を求めなさい．
(iv) $\log_2 S_2 - \log_2 S_1$ の値を求めなさい．

(19 帯広畜産大 9)

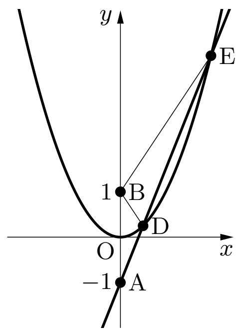
【答】

(1) (i) $b = -1$
(ii) $a = \dfrac{{x_1}^2 + 1}{x_1}$
(iii) $a \geqq 2$

(2) (i) $x_1 = 1,\ y_1 = 1$
(ii) $\mathrm{AD} = \sqrt{5}$
(iii) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$，$\tan 2\theta = \dfrac{4}{3}$

(3) (i) $y_1 = \dfrac{1}{4},\ x_2 = 2,\ y_2 = 4$，$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$
(ii) $\mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$，$\mathrm{BE} = \sqrt{13}$
(iii) $\left(x + \dfrac{11}{16}\right)^2 + y^2 = \dfrac{377}{256}$
(iv) $\log_2 S_2 - \log_2 S_1 = 4$

【解答】



(1) (i) 直線 $L : y = ax + b$ は点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ を通るから

$$\boldsymbol{b = -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) (i) より

$$L : y = ax - 1$$

であり，$\mathrm{D}(x_1,\ y_1)$ は L と $C : y = x^2$ の共有点であるから

$$ax_1 - 1 = {x_1}^2$$

$0 < x_1 \leqq x_2$ より $x_1 \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = \dfrac{{x_1}^2 + 1}{x_1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) a の値の範囲は $a=\dfrac{x^2+1}{x}$ が解 $x_1,\ x_2$ をもち，かつ $0<x_1 \leqq x_2$ を満たすものが存在するような a の条件である，これは $x^2-ax+1=0$ の 2 解がともに正であるための a の条件でもある．

$f(x)=x^2-ax+1$ とおくと，求める条件は

$$\begin{cases}(\text{判別式}) \geqq 0 \\ \text{軸の位置}:\dfrac{a}{2}>0 \\ \text{端点の符号}:f(0)>1\end{cases} \iff \begin{cases}a^2-4\cdot 1 \geqq 0 \\ a>0 \\ 1>0\ (\text{つねに成立})\end{cases}$$

まとめると

$$\boldsymbol{a \geqq 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (ii) の結果と $x_1>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると
$$a=\frac{{x_1}^2+1}{x_1}=x_1+\frac{1}{x_1} \geqq 2\sqrt{x_1\cdot\frac{1}{x_1}}=2 \quad (\text{等号は } x_1=1 \text{ のとき成立})$$
を得るが，これは a が $x_1=1$ のとき最小値 2 をとることの証明にはなるが，a の値の範囲が $a \geqq 2$ であることを主張しているわけではないことに注意せよ．
- a を x_1 の関数とみて，$x_1>0$ でグラフの増減を調べてもよい (数学 III).

(2) $x_1=x_2$ のとき

(i) $x_1=x_2\ (>0)$ となるのは，L が C の接線となるときである．

$$ax-1=x^2 \quad \text{すなわち } x^2-ax+1=0$$

が正の重解をもつときであり

$$\begin{cases}\text{判別式}:a^2-4=0 \\ \text{軸の位置}:\dfrac{a}{2}>0\end{cases} \qquad \therefore\quad a=2$$

のときであり，接点の x 座標は

$$x^2-2x+1=0 \qquad \therefore\quad (x-1)^2=0 \qquad \therefore\quad x=1$$

である．$(x_1,\ y_1)$ は接点 D の座標であるから

$$\boldsymbol{x_1=1,\ y_1=1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

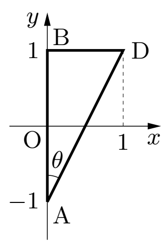
- $C:y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ $(t>0)$ における接線の方程式は
$$y=2t(x-t)+t^2 \qquad \therefore\quad y=2tx-t^2$$
であり，これが $\mathrm{A}(0,\ -1)$ を通るから
$$-1=0-t^2 \qquad \therefore\quad t=1 \quad (\because\ t>0)$$
$$\therefore\quad x_1=1,\ y_1=1$$
である．

(ii) $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{D}(1,\ 1)$ より

$$\mathbf{AD}=\sqrt{1+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) このとき，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ より $\triangle\mathrm{DAB}$ は $\angle\mathrm{ABD}=90^\circ$ の直角三角形であり，$\angle\mathrm{DAB}=\theta$ であるから



$$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{\tan 2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2}$ のとき

(ｉ) $$\boldsymbol{y_1} = {x_1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$ ……(答)

このとき，L の傾き a は

$$a = \frac{{x_1}^2 + 1}{x_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

であり，直線 L の方程式は

$$y = \frac{5}{2}x - 1$$

となる．

$x_1 \fallingdotseq 1$ のとき，L と C は異なる共有点 D，E をもつ．点 E$(x_2,\ y_2)$ は D$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と異なる L と C の共有点であるから

$$\frac{5}{2}x_2 - 1 = {x_2}^2$$
$$2{x_2}^2 - 5x_2 + 2 = 0$$
$$(x_2 - 2)(2x_2 - 1) = 0$$

$x_2 \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{x_2 = 2,\ y_2 = 4}$$ ……(答)

である．よって

$$\sin\theta = \frac{x_2}{\mathrm{AE}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{29}}{29}}$$ ……(答)

である．

(ii) B$(0,\ 1)$，D$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$，E$(2,\ 4)$ から

$$\mathrm{BD} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{4}}$$ ……(答)

$$\mathrm{BE} = \sqrt{4 + 9} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$$ ……(答)

である．

(iii) A$(0,\ -1)$，B$(0,\ 1)$，D$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ である．

線分 AB の垂直二等分線は x 軸であり，△ABD の外接円の中心は x 軸上にある．また，BD の中点が $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{8}\right)$ であり，直線 BD の傾きが $\dfrac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2} - 0} = -\dfrac{3}{2}$ であるから，線分 BD の垂直二等分線の方程式は

$$y = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8} \qquad \therefore \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{24}$$

である．この直線と x 軸との交点が外接円の中心 M である．M の座標は

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{24} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (x,\ y) = \left(-\frac{11}{16},\ 0\right)$$

である．外接円の半径 R_1 は

$$R_1 = \mathrm{MA} = \sqrt{\left(\frac{11}{16}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{377}}{16}$$

であり，外接円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x + \frac{11}{16}\right)^2 + y^2 = \frac{377}{256}}$$ ……(答)

である．

- 外接円の半径 R_1 は正弦定理を用いて

$$R_1=\frac{\mathrm{BD}}{2\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{13}}{4}}{2\cdot\frac{2\sqrt{29}}{29}}=\frac{\sqrt{377}}{16}$$

としてもよい．

- △ABD の外接円の方程式を $x^2+y^2+fx+gy+h=0$ とおくと，3 点 A$(0,\ -1)$，B$(0,\ 1)$，D$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ を通ることから

$$\begin{cases}1-g+h=0\\1+g+h=0\\\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}f+\frac{1}{4}g+h=0\end{cases}\qquad\therefore\quad g=0,\ h=-1,\ f=\frac{11}{8}$$

よって，△ABD の外接円の方程式は

$$x^2+y^2+\frac{11}{8}x-1=0$$

である．

(iv) △ABE の外接円の半径を R_2 とおくと

$$\log_2 S_2-\log_2 S_1=\log_2\frac{S_2}{S_1}=\log_2\frac{\pi {R_2}^2}{\pi {R_1}^2}=\log_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

である．ここで，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta}=2R_1,\quad\frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta}=2R_2$$

であり

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{13}}{4}}=4$$

であるから

$$\log_2 S_2-\log_2 S_1=\log_2 4^2=\log_2 2^4=\mathbf{4}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．