垂心の軌跡，面積

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(s,\ t)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABP}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$t > 0$ とする．

(1) $\triangle\mathrm{ABP}$ の頂点 A，B，P から，それぞれの対辺またはその延長上に下ろした垂線が 1 点 H で交わることを証明せよ．
(2) 点 P が曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 上を動くとき，(1) の点 H について，その軌跡の方程式を求めよ．
(3) (2) で求めた軌跡との x 軸とで囲まれた図形のうち，x 軸の上側の部分の面積を求めよ．

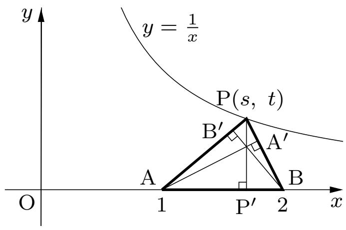
(19 北海道教大 2)

【答】

(1) 略
(2) $y = -x(x-1)(x-2)$
(3) $\dfrac{1}{4}$

【解答】

(1) $\triangle\mathrm{ABP}$ の頂点 A，B，P から対辺またはその延長に，それぞれ垂線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{PP'}$ を下ろす．



直線 $\mathrm{AA'}$ は，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り法線ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} s-2 \\ t \end{pmatrix}$ をとることができるから，方程式は

$$(s-2)(x-1) + ty = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．直線 $\mathrm{BB'}$ は，$\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通り法線ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} s-1 \\ t \end{pmatrix}$ をとることができるから，方程式は

$$(s-1)(x-2) + ty = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．直線 $\mathrm{PP'}$ の方程式は

$$x = s \qquad \cdots\cdots ③$$

である．直線 ② と ③ の交点の座標は $\left(s,\ -\dfrac{(s-1)(s-2)}{t}\right)$ であるが，直線①も同じ点を通る．

よって，垂線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{PP'}$ は 1 点 $\mathrm{H}\left(s,\ -\dfrac{(s-1)(s-2)}{t}\right)$ で交わる．

……(証明終わり)

(2) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 上を動くときの $\mathrm{H}(x,\ y)$ の軌跡は

$$(*) \begin{cases} t = \dfrac{1}{s} \ (s > 0) \\ x = s \\ y = -\dfrac{(s-1)(s-2)}{t} \end{cases}$$

を満たす $s,\ t$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

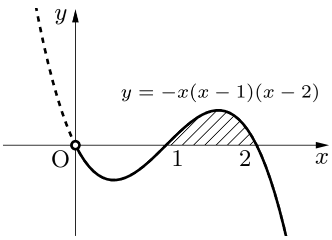
$$(*) \iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{s} \\ s = x > 0 \\ y = -x(x-1)(x-2) \end{cases}$$

であるから，点 H の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{y = -x(x-1)(x-2)\ (x > 0)}$$ ……(答)

である．

(3) (2) の軌跡と x 軸で囲まれた図形のうち，x 軸の上側の部分は右図の斜線部分である．この面積は



$$\begin{aligned} &\int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)\, dx \\ &= \Big[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \Big]_1^2 \\ &= (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$ ……(答)

となる．