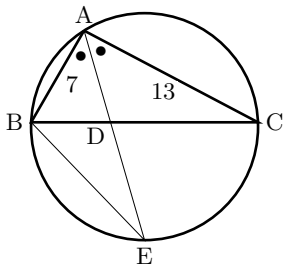
三角形 ABC において，AB = 7，CA = 13，外接円の半径 $R = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ とする．∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D，外接円との交点を E とする．ただし，∠ABC は鋭角とする．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．
(2) 線分 AD の長さを求めよ．
(3) 線分 BE の長さを求めよ．

(19 青森公立大 3)

【答】
(1) $\mathrm{BC} = 15$
(2) $\mathrm{AD} = \dfrac{7\sqrt{13}}{4}$
(3) $\mathrm{BE} = 3\sqrt{13}$

【解答】



(1) 正弦定理より

$$\frac{13}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2\cdot\frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∠ABC は鋭角より，$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ である．余弦定理より

$$13^2 = 7^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot 7\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\mathrm{BC}^2 - 7\mathrm{BC} - 120 = 0$$

$$(\mathrm{BC} - 15)(\mathrm{BC} + 8) = 0$$

$\mathrm{BC} > 0$ より

$$\mathrm{BC} = \mathbf{15} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) D は ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 7 : 13$$

であり

$$\mathrm{BD} = \frac{7}{20}\mathrm{BC} = \frac{7}{20}\cdot 15 = \frac{21}{4}$$

△ABD で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= 7^2 + \left(\frac{21}{4}\right)^2 - 2\cdot 7\cdot\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{49\cdot 16 + 441 - 147\cdot 4}{4^2}\\ &= \frac{637}{16}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AD} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{13}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $\triangle\mathrm{BDE} \backsim \triangle\mathrm{ADC}$ より

$$\mathrm{BD} : \mathrm{BE} = \mathrm{AD} : \mathrm{AC}$$

$$\frac{21}{4} : \mathrm{BE} = \frac{7\sqrt{13}}{4} : 13$$

$$\frac{7\sqrt{13}}{4} \cdot \mathrm{BE} = 13 \cdot \frac{21}{4}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BE} = \boldsymbol{3\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- トレミーの定理，すなわち

$$\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AE} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE} + \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CE}$$

を用いる．

$$15 \cdot \left(\frac{7\sqrt{13}}{4} + \mathrm{DE}\right) = 13 \cdot \mathrm{BE} + 7 \cdot \mathrm{CE} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

D に関して方べきの定理を用いると

$$\mathrm{DA} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{DB} \cdot \mathrm{DC}$$

$$\frac{7\sqrt{13}}{4} \cdot \mathrm{DE} = \frac{21}{4} \cdot \left(15 - \frac{21}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \mathrm{DE} = \frac{21 \cdot (60 - 21)}{4 \cdot 7\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

$\angle\mathrm{EBC} = \mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EAB} = \angle\mathrm{ECB}$ より，$\triangle\mathrm{EBC}$ は二等辺三角形であり

$$\mathrm{CE} = \mathrm{BE}$$

である．したがって

$$㋐ \iff 15 \cdot \left(\frac{7\sqrt{13}}{4} + \frac{9\sqrt{13}}{4}\right) = (13 + 7) \cdot \mathrm{BE}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BE} = \frac{15 \cdot 4\sqrt{13}}{20} = 3\sqrt{13}$$

である．