三角形 ABC において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E，辺 CA の中点を F とする．また，直線 AE と直線 DF の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，辺 AB の長さを s，辺 AC の長さを t，角 BAC の大きさを θ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
(3) 線分 AP の長さを s，t，θ を用いて表せ．
(4) 点 P が三角形 ABC の外心 (外接円の中心) であるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(19 宇都宮大 教・工・地域デ・農 2)

【答】

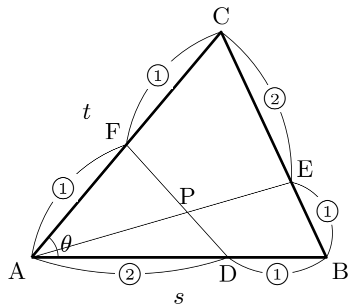
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{4s^2+4st\cos\theta+t^2}$

(4) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【解答】



(1) E は辺 BC を $1:2$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) P は線分 AE 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\frac{2k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表すことができる．

一方，P は線分 DF 上の点でもあるから，実数 p を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+p\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\&=\frac{2(1-p)}{3}\vec{b}+\frac{p}{2}\vec{c}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すことができる．$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立あるから，①，②より

$$\begin{cases}\dfrac{2k}{3}=\dfrac{2(1-p)}{3}\\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{p}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}k+p=1\\2k-3p=0\end{cases}\qquad\therefore\quad k=\frac{3}{5},\quad p=\frac{2}{5}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ① を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2k}{3}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c} = \frac{2k}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \frac{k}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right) = k\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

となる．P は直線 DF 上の点であるから

$$k + \frac{2k}{3} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{3}{5}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$ を得る．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= \frac{1}{25}|2\vec{b} + \vec{c}|^2 = \frac{1}{25}(4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2)\\ &= \frac{1}{25}(4s^2 + 4st\cos\theta + t^2)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \boldsymbol{\frac{1}{5}\sqrt{4s^2 + 4st\cos\theta + t^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) P が三角形 ABC の外心であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}\right) - \vec{b} = \frac{-3\vec{b} + \vec{c}}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{BP}}| &= \frac{1}{5}\sqrt{|-3\vec{b} + \vec{c}|^2} = \frac{1}{5}\sqrt{9|\vec{b}|^2 - 6\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2}\\ &= \frac{1}{5}\sqrt{9s^2 - 6st\cos\theta + t^2}\end{aligned}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}\right) - \vec{c} = \frac{2\vec{b} - 4\vec{c}}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| &= \frac{2}{5}\sqrt{|\vec{b} - 2\vec{c}|^2} = \frac{2}{5}\sqrt{|\vec{b}|^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 4|\vec{c}|^2}\\ &= \frac{2}{5}\sqrt{s^2 - 4st\cos\theta + 4t^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(*) &\iff \sqrt{4s^2 + 4st\cos\theta + t^2} = \sqrt{9s^2 - 6st\cos\theta + t^2} = 2\sqrt{s^2 - 4st\cos\theta + 4t^2}\\ &\iff \begin{cases}4s^2 + 4st\cos\theta + t^2 = 9s^2 - 6st\cos\theta + t^2\\ 4s^2 + 4st\cos\theta + t^2 = 4(s^2 - 4st\cos\theta + 4t^2)\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}5s^2 - 10st\cos\theta = 0\\ 20st\cos\theta - 15t^2 = 0\end{cases}\end{aligned}$$

$s \fallingdotseq 0,\ t \fallingdotseq 0$ より

$$\begin{aligned}&\iff \begin{cases}s - 2t\cos\theta = 0\\ 4s\cos\theta - 3t = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}s = 2t\cos\theta\\ 8t\cos^2\theta = 3t\end{cases}\end{aligned}$$

$\cos\theta = \frac{s}{2t} > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 三角形 ABC の外心 P は，P が各辺の垂直二等分線の交点である．F は辺 CA の中点であるから，辺 AB の中点を M とおくと

  $$\mathrm{PF} \perp \mathrm{AC} \text{ かつ } \mathrm{PM} \perp \mathrm{AB}$$

  すなわち

  $$(**)\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\end{cases}$$

  が成り立つ．ここで

  $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &=\left\{\frac{1}{2}\vec{c}-\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\right)\right\}\cdot\vec{c}\\ &=\left(-\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}\\ &=-\frac{2}{5}st\cos\theta+\frac{3}{10}t^2\\ &=\frac{t}{10}(-4s\cos\theta+3t)\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &=\left\{\frac{1}{2}\vec{b}-\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\right)\right\}\cdot\vec{b}\\ &=\left(\frac{1}{10}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\\ &=\frac{1}{10}s^2-\frac{1}{5}st\cos\theta\\ &=\frac{s}{10}(s-2t\cos\theta)\end{aligned}$$

  である．$s \neq 0$, $t \neq 0$ であるから

  $$(**) \iff \begin{cases}-4s\cos\theta+3t=0\\ s-2t\cos\theta=0\end{cases} \iff \begin{cases}s=2t\cos\theta\\ 3t-8t\cos^2\theta=0\end{cases}$$

  以下,【解答】と同じ．