ベクトル $\vec{a}=\left(1,\ 1,\ \sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=(-1,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について，ベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ の大きさ $|\vec{a}-\vec{b}|$ は

$$\theta=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi \text{ で最大値}\sqrt{\boxed{\text{チ}}},\quad \theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}} \text{ で最小値}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

をとる．

(19 金沢工大 工・情報・建築・バイオ・化学 1(8))

【答】

ソ	タ	チ	ツ	テ
4	3	13	3	5

【解答】

$\vec{a}=\left(1,\ 1,\ \sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=(-1,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ より

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(2,\ 1-\cos\theta,\ \sqrt{3}-\sin\theta\right)$$

であり

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=4+(1-\cos\theta)^2+(\sqrt{3}-\sin\theta)^2\\&=4+(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+(3-2\sqrt{3}\sin\theta+\sin^2\theta)\\&=9-2(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\&=9-4\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=9-4\times1\times1\times\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\\&=9-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ だから

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\pi$ つまり，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{4}{3}\pi}$ **で最大値** $\boldsymbol{\sqrt{13}}$ ……(答)

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=0$ つまり，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$ **で最小値** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ ……(答)

をとる．

- 大きさは次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=(1+1+3)-2(-1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+(1+\cos\theta^2+\sin^2\theta)\\&=9-2(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\end{aligned}$$

  以下，同じ．

- 解答では積の和を内積とみて，cos に合成したが，ベクトルをもち出さずに三角関数の加法定理を用いればよいし，sin に合成してもよい．

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=9-2\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)\\&=9-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\\&=9-4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=9-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

  以下，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ を動かせば解答の最大値，最小値を得る．