p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ．
(2) 点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

(19 北海道大 理 1 文 1)

【答】

(1) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{5(p+2)}{9},\ -\dfrac{2(p+2)}{9},\ \dfrac{4(p+2)}{9}\right)$

(2) $-2 \leqq p \leqq -\dfrac{5}{7}$

【解答】

(1) 点 Q は平面 α 上にあるから，実数 a, b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．さらに，$\mathrm{PQ} \perp (\text{平面 } \alpha)$ であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 & \cdots\cdots ② \\ (a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ -1,\ 2)$ であるから

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 5, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 9, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -6, \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -(p+2), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2(p+2) \end{cases}$$

が成り立ち，②，③は

$$\begin{cases} 5a - 6b + (p+2) = 0 \\ -6a + 9b - 2(p+2) = 0 \end{cases}$$

となる．a, b を p を用いて解くと

$$a = \frac{p+2}{3}, \quad b = \frac{4(p+2)}{9} \qquad \cdots\cdots ④$$

である．① により

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{p+2}{3}(-1,\ 2,\ 0) + \frac{4(p+2)}{9}(2,\ -2,\ 1)$$

であり，Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{5(p+2)}{9}},\ -\boldsymbol{\frac{2(p+2)}{9}},\ \boldsymbol{\frac{4(p+2)}{9}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ①で定められる点 Q が △OAB の周または内部にあるための条件は

$$a \geqq 0 \text{ かつ } b \geqq 0 \text{ かつ } a+b \leqq 1$$

である．④ より，これを p で表すと

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(p+2) \geqq 0 \\ \dfrac{4}{9}(p+2) \geqq 0 \\ \dfrac{1}{3}(p+2)+\dfrac{4}{9}(p+2) \leqq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p \geqq -2 \\ p \geqq -2 \\ 7p+14 \leqq 9 \end{cases}$$

$$\therefore \quad -2 \leqq p \leqq -\frac{5}{7}$$

これは $p<0$ を満たす．よって，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq p \leqq -\frac{5}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．