座標空間の 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) が定める平面を α とする．点 D(1, 1, 2) から平面 α に垂線を下ろし，垂線と平面 α との交点を H とすると点 H の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である．

また，座標空間に点 E(1, 1, 1) をとり，点 P は平面 α 上を動くものとする．このとき，線分の長さの和 DP + PE の最小値は $\boxed{\text{キ}}$ で，そのときの点 P の y 座標は $\boxed{\text{ク}}$ であり，$\mathrm{DP}^2 + \mathrm{PE}^2$ の最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ で，そのときの点 P の z 座標は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(19 同志社大 文系 1(2))

【答】

カ	キ	ク	ケ	コ
0	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{2}{3}$

【解答】

H は平面 α 上の点であるから，実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる．A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1,\ 0,\ 0) + s(-1,\ 1,\ 0) + t(-1,\ 0,\ 1)\\ &= (1-s-t,\ s,\ t) \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．$\mathrm{DH} \perp \alpha$ であるから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0\end{cases}$$

であり，D(1, 1, 2) より

$$\begin{cases}(-s-t,\ s-1,\ t-2)\cdot(-1,\ 1,\ 0) = 0\\ (-s-t,\ s-1,\ t-2)\cdot(-1,\ 0,\ 1) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(-s-t) + (s-1) + 0 = 0\\ -(-s-t) + 0 + (t-2) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2s + t - 1 = 0\\ s + 2t - 2 = 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad s = 0,\ t = 1$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (0,\ 0,\ 1)$ であり

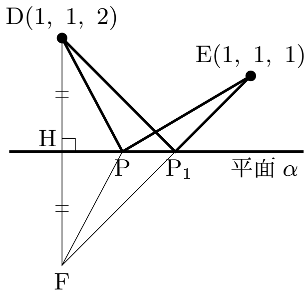
H の x 座標は **0** ……(答)

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直なベクトルとして $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$ をとることができる．$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\\ &= (1,\ 1,\ 2) + \frac{(0,\ -1,\ -2)\cdot(1,\ 1,\ 1)}{1+1+1}(1,\ 1,\ 1)\\ &= (1,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)\\ &= (0,\ 0,\ 1)\end{aligned}$$

である．



次に，点 D の平面 α に関する対称点を F とおくと，線分の長さの和 $\mathrm{DP}+\mathrm{PE}$ は

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PE}=\mathrm{FP}+\mathrm{PE}\geqq\mathrm{FE}$$

であり，等号は P が直線 EF と平面 α の交点 $\mathrm{P_1}$ と一致するとき成立する．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\&=(1,\ 1,\ 2)+2(-1,\ -1,\ -1)\\&=(-1,\ -1,\ 0)\end{aligned}$$

であり，線分の長さの和 $\mathrm{DP}+\mathrm{PE}$ の最小値 EF は

$$\mathrm{EF}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2+(0-1)^2}=\mathbf{3}$$ ……(答)

である．このときの P，すなわち $\mathrm{P_1}$ の座標を求める．

$\mathrm{P_1}$ は平面 α 上の点であるから，実数 $s,\ t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=(1-s-t,\ s,\ t)\quad(\because\ ①)$$

とおくことができる．また，$\mathrm{P_1}$ は直線 EF 上の点でもあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{EF}}\\&=(1,\ 1,\ 1)+k(-2,\ -2,\ -1)\\&=(1-2k,1-2k,1-k)\end{aligned}$$

でもある．よって

$$\begin{cases}-u-v=-2k\\u-1=-2k\\v-1=-k\end{cases}\qquad\therefore\quad k=\frac{2}{5},\ s=\frac{1}{5},\ t=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

よって，

求める P の y 座標は $\mathbf{\dfrac{1}{5}}$ ……(答)

である．

また，平面 α 上の点 $\mathrm{P}(1-s-t,\ s,\ t)$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathrm{DP}^2+\mathrm{PE}^2\\&=\{(-s-t)^2+(s-1)^2+(t-2)^2\}+\{(-s-t)^2+(s-1)^2+(t-1)^2\}\\&=(2s^2+2t^2+2st-2s-4t+5)+(2s^2+2t^2+2st-2s-2t+2)\\&=4s^2+4t^2+4st-4s-6t+7\\&=4s^2+4(t-1)s+4t^2-6t+7\\&=4\left(t+\frac{t-1}{2}\right)^2-(t-1)^2+4t^2-6t+7\\&=4\left(u+\frac{t-1}{2}\right)^2+3t^2-4t+6\\&=4\left(s+\frac{t-1}{2}\right)^2+3\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\\&\geqq\frac{14}{3}\end{aligned}$$

等号は

$$\begin{cases}s+\dfrac{t-1}{2}=0\\t-\dfrac{2}{3}=0\end{cases}\qquad\therefore\quad t=\frac{2}{3},\ s=\frac{1}{6}$$

のとき成立する．このとき $\mathrm{P}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$ である．

よって，$\mathrm{DP}^2+\mathrm{PE}^2$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{14}{3}}$ ……（答）

であり，このときの

P の z 座標は $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ ……（答）

である．