整式 $x^{2019}+x^{2020}$ を整式 x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

(20 広島工大 1(2))

【答】 $x+1$

【解答】

$x^{2019}+x^{2020}$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ ($a,\ b$ は実数) とすると

$$x^{2019}+x^{2020}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

である．

また $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると

$$\omega^2+\omega+1=0 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

であり

$$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \qquad \therefore \quad \omega^3=1 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

である．①に $x=\omega$ を代入すると，②，③ より

$$(\text{①の左辺})=\omega^{2019}+\omega^{2020}=\omega^{3\times 673}+\omega^{3\times 673+1}=1+\omega$$
$$(\text{①の右辺})=0\times Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$$

であるから，① は

$$1+\omega=a\omega+b$$

となる．$a,\ b$ は実数，ω は虚数より

$$a=1,\ b=1$$

である．したがって，求める余りは

$$\boldsymbol{x+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．