方程式 $|2x+1|+|x-\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}$ を解きなさい．

(20 大阪薬大 薬 2(1))

【答】 $x=-\dfrac{2}{3},\ 0$

【解答】

$$|2x+1|+|x-\sqrt{3}|=1+\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

絶対値を外すための場合分けする．

(i) $x \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき

$$① \iff -(2x+1)-(x-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad -3x-1+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad x=-\frac{2}{3} \quad ((\text{i})\ \text{の範囲を満たす})$$

(ii) $-\dfrac{1}{2}<x<\sqrt{3}$ のとき

$$① \iff (2x+1)-(x-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad x+1+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad x=0 \quad ((\text{ii})\ \text{の範囲を満たす})$$

(iii) $\sqrt{3} \leqq x$ のとき，

$$① \iff (2x+1)+(x-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad 3x+1-\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ((\text{iii})\ \text{の範囲を満たさない})$$

以上 (i)，(ii), (iii) より，求める解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{2}{3},\ 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ① の解は

$$y=|2x+1|+|x-\sqrt{3}|,$$
$$y=1+\sqrt{3}$$

の共有点の x 座標であり，この 2 つのグラフを図示すると右図となり，交点の座標は

$$\left(-\frac{2}{3},\ 1+\sqrt{3}\right),\ \left(0,\ 1+\sqrt{3}\right)$$

である．