方程式 $|x-2|=5x$ を解け.

(20 高知工科大 経済・マネ 1(1))

【答】 $x=\dfrac{1}{3}$

【解答】

$$|x-2|=5x \qquad \cdots\cdots ①$$

絶対値をはずすために x の範囲を場合分けする.

(i) $x \leqq 2$ のとき

$$① \iff -(x-2)=5x$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3} \qquad \text{これは } x \leqq 2 \text{ を満たす.}$$

(ii) $x \geqq 2$ のとき

$$① \iff x-2=5x$$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{2} \quad \text{これは } x \geqq 2 \text{ に反する.}$$

以上, (i), (ii) より $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}}$ ……(答)

- ① を同値変形すると

$$① \iff \begin{cases} x-2=\pm 5x \\ 5x \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x=-2 \text{ または } -6x=-2 \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}$$

である.

- 両辺を平方しながら, ① を同値変形すると

$$① \iff \begin{cases} (x-2)^2=25x^2 & \cdots\cdots ② \\ x \geqq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② を変形すると

$$24x^2+4x-4=0$$
$$4(3x-1)(2x+1)=0$$

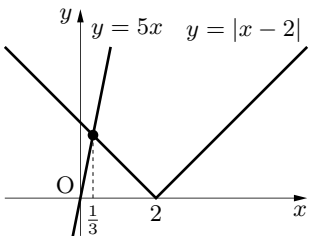
③ より

$$x=\frac{1}{3}$$

である.

- ① の解は, 折れ線 $y=|x-2|$ と直線 $y=5x$ の共有点の x 座標である.
  右のグラフより

$$-(x-2)=5x$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}$$

である.