$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ を実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $a^2-b^2>0$ のとき，t についての 2 次方程式 $(at+x)^2-(bt+y)^2=0$ は，実数解をもつことを示せ．

(2) $a^2-b^2>0$ のとき，$(ax-by)^2 \geqq (a^2-b^2)(x^2-y^2)$ が成り立つことを示せ．

(3) $a^2-b^2-c^2>0$ のとき，$(ax-by-cz)^2 \geqq (a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$ が成り立つことを示せ．

(20 大阪市大 後 理 (数) 6)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1)
$$f(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2$$
とおき，展開すると
$$f(t)=(a^2-b^2)t^2+2(ax-by)t+(x^2-y^2)$$
$a^2-b^2>0$ より $u=f(t)$ は下に凸な放物線を表す．$a^2>b^2 \geqq 0$ より $a \fallingdotseq 0$ であり
$$f\left(-\frac{x}{a}\right)=0-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2 \leqq 0$$
であるから，$u=f(t)$ は t 軸 と共有点をもつ．

よって，t についての 2 次方程式 $f(t)=0$ は実数解をもつ．　……(証明終わり)

- t についての 2 次方程式 $f(t)=0$ の判別式を D_1 とすると
$$\begin{aligned}\frac{D_1}{4}&=(ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2)\\&=a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\&=(ay-bx)^2\\&\geqq 0\end{aligned}$$
であり，$f(t)=0$ は実数解をもつことが示されるが
$$\frac{D_1}{4} \geqq 0 \iff (ax-by)^2 \geqq (a^2-b^2)(x^2-y^2)$$
であり，(2) を示して (1) の結論を得たことになる．これでは問題の流れがおかしい．

- $f(t)$ は次のように因数分解できる．
$$\begin{aligned}f(t)&=\{(at+x)+(bt+y)\}\{(at+x)-(bt+y)\}\\&=\{(a+b)t+x+y\}\{(a-b)t+x-y\}\end{aligned}$$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ より $a+b \fallingdotseq 0$ かつ $a-b \fallingdotseq 0$ であるから，$f(t)=0$ の解は
$$t=\frac{x+y}{a+b},\ -\frac{x-y}{a-b}$$
である．

　$a,\ b,\ x,\ y$ は実数であるから，$f(t)=0$ は実数解をもつ．

(2) (1) より $f(t)=0$ は実数解をもつから，t についての 2 次方程式 $f(t)=0$ の判別式を D_1 とすると $D_1 \geqq 0$ が成り立つ．よって

$$\frac{D_1}{4} \geqq 0 \iff (ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2) \geqq 0$$
$$\therefore \quad (ax-by)^2 \geqq (a^2-b^2)(x^2-y^2)$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(3) (1)，(2) の流れに従い，

$$g(t)=(at+x)^2-(bt+y)^2-(ct+z)^2$$

とおく．

$$g(t)=(a^2-b^2-c^2)t^2+2(ax-by-cz)t+(x^2-y^2-z^2)$$

$a^2-b^2-c^2>0$ より，$u=g(t)$ は下に凸な放物線を表す．$a^2>b^2+c^2 \geqq 0$ より $a \neq 0$ であり

$$g\left(-\frac{x}{a}\right)=0-\left(-\frac{bx}{a}+y\right)^2-\left(-\frac{cx}{a}+z\right)^2 \leqq 0$$

であるから，$u=g(t)$ は t 軸と共有点をもつ．したがって，t についての 2 次方程式 $g(t)=0$ は実数解をもつので，$g(t)=0$ の判別式を D_2 とすると，$D_2 \geqq 0$ が成り立つ．よって

$$\frac{D_2}{4}=(ax-by-cz)^2-(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2) \geqq 0$$

すなわち

$$(ax-by-cz)^2 \geqq (a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

が成り立つ． ……(証明終わり)