$a,\ b,\ c$ を正の実数とするとき，次の各不等式が成り立つことを証明しなさい．

(i) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

(ii) $\left\{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\right\}^{-1} \leqq \dfrac{a+b+c}{3}$

(20 福島大 人文社会 2(1))

【答】

(i) 略

(ii) 略

【解答】

(i) $a,\ b$ は正の実数より，$\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{a}{b}>0$ なので，相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

等号成立は $a=b$ のときである．　……(証明終わり)

(ii) 示すべき不等式の右辺と左辺の差をとると

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b+c}{3}-\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}^{-1}\\
&=\frac{a+b+c}{3}-\frac{3abc}{ab+bc+ca}\\
&=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc}{3(ab+bc+ca)} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

$a,\ b,\ c>0$ より $ab+bc+ca>0$，すなわち，(分母) >0 である．(分子) $\geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
(\text{分子}) &= a\{(ab+bc+ca)-3abc\}+b\{(ab+bc+ca)-3abc\}\\
&\quad +c\{(ab+bc+ca)-3abc\}\\
&=(\underline{\underline{a^2b}}\ \underline{-2abc}+ca^2)+(\underline{ab^2}+b^2c\ \underline{\underline{-2abc}})+(-2abc+\underline{\underline{bc^2}}+\underline{c^2a})\\
&=\underline{a(-2bc+b^2+c^2)}+\underline{\underline{b(a^2-2ca+c^2)}}+c(a^2+b^2-2ab)\\
&=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $a=b=c$ のときである．

よって，目標の不等式は示された．　……(証明終わり)

- ① の分子については，3 文字の相加平均・相乗平均の関係を用いてもよい．$a,\ b,\ c$ は正の実数より

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc\\
\geqq&\,3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}-9abc\\
=&\,9\sqrt[3]{a^3b^3c^3}-9abc=9abc-9abc=0
\end{aligned}$$

等号成立は $\begin{cases} a=b=c \\ ab=bc=ca \end{cases}$ すなわち　$a=b=c$　のときである．

- 示すべき不等式は

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}\geqq 1 \qquad \cdots\cdots \text{ⓐ}$$

すなわち

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq 9$$

である．左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&=\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)\\
&=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\\
&\geqq 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} \quad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係})\\
&=3+2+2+2\\
&=9
\end{aligned}$$

等号成立は $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}\\ \dfrac{c}{b}=\dfrac{b}{c}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{c}\end{cases}$ すなわち $a=b=c$ のときである．

- ⓐ を 3 文字の相加平均・相乗平均の関係を用いて示してもよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b+c}{3}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}\\
&\geqq \sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\\
&=1
\end{aligned}$$

等号成立は $\begin{cases}a=b=c\\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}\end{cases}$ すなわち $a=b=c$ のときである．

- $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ はすべて正の数であるから，3 文字の相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$$

逆数をとると

$$\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}^{-1}\leqq\sqrt[3]{abc}\leqq\frac{a+b+c}{3}$$

等号成立は $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}\\ a=b=c\end{cases}$ すなわち $a=b=c$ のときである．