

不等式 $|x^2 - 2x - 8| < -x + 4$ を解け.

(20 釧路公大 中 経済 1(5))

【答】 $-3 < x < -1$

【解答】

与えられた不等式を変形していく.

$$\begin{aligned} & |x^2 - 2x - 8| < -x + 4 \\ \Leftrightarrow & -(-x + 4) < x^2 - 2x - 8 < -x + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 4 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

さらに, 変形し

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-4)(x+1) > 0 \\ (x-4)(x+3) < 0 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} x < -1, 4 < x \\ -3 < x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

まとめると

$$\mathbf{-3 < x < -1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- $|X| < A \Leftrightarrow -A < X < A$
として絶対値をはずしたが,
 $X \geq 0, X < 0$ ($X \leq 0$ でもよい) と場合分け
して絶対値をはずしもよい.

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$$

に注意すると

- (i) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ ($x \leq -2, 4 \leq x$) のとき

$$x^2 - 2x - 8 < -x + 4$$

$$x^2 - x - 12 < 0$$

$$(x+3)(x-4) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 4$$

$x \leq -2, 4 \leq x$ とあわせると

$$-3 < x \leq -2$$

- (ii) $x^2 - 2x - 8 < 0$ ($-2 < x < 4$) のとき

$$-x^2 + 2x + 8 < -x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$(x+1)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -1, 4 < x$$

$-2 < x < 4$ とあわせると

$$-2 < x < -1$$

- (i), (ii) より

$$\mathbf{-3 < x < -1}$$

である.