k を実数とする．関数 $f(x)=x^2-2(k+2)x+k^2-k+4$ について，次の設問に答えなさい．

(i) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値をそれぞれ k を用いて表しなさい．
(ii) $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，常に不等式 $f(x)>0$ が成り立つような k の値の範囲を求めなさい．

(20 岩手県大 ソフト情 1(1))

【答】

(i) 最小値 $-5k$，$x=k+2$
(ii) $k<0$ または $5<k$

【解答】

(i)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2(k+2)x+k^2-k+4 \\ &= (x-k-2)^2-(k+2)^2-5k \\ &= (x-k-2)^2-5k \end{aligned}$$

より，$f(x)$ の

最小値は $\boldsymbol{-5k}$ ……(答)

であり，そのときの x の値は

$\boldsymbol{x=k+2}$ ……(答)

である．

(ii) $f(x)$ の $1 \leqq x \leqq 2$ における最小値を m とすると，求める条件は

「$m>0$」 …… $(*)$

である．軸：$x=k+2$ の位置で場合分けしながら考察する．

(ア) $k+2 \leqq 1$ (すなわち $k \leqq -1$) のとき：
$m=f(1)=k^2-3k+1$ だから

$$(*) \iff k^2-3k+1>0$$
$$\left(k-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)>0$$
$$\therefore\ k<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ または } \frac{3+\sqrt{5}}{2}<k$$

$k \leqq -1$ とあわせると $k \leqq -1$ となる．

(イ) $1 \leqq k+2 \leqq 2$ (すなわち $-1 \leqq k \leqq 0$) のとき：
$m=f(k+2)=-5k$ だから

$$(*) \iff -5k>0$$
$$\therefore\ k<0$$

$-1 \leqq k \leqq 0$ とあわせると $-1 \leqq k<0$ となる．

(ウ) $2 \leqq k+2$ (すなわち $0 \leqq k$) のとき：

$m = f(2) = k^2 - 5k$ だから

$$(*) \iff k(k-5) > 0$$

$$\therefore \quad k < 0 \text{ または } 5 < k$$

$0 \leqq k$ とあわせると $5 < k$ となる．

以上 (ア)，(イ)，(ウ) より，求める k の値の範囲は

$\boldsymbol{k < 0}$ **または** $\boldsymbol{5 < k}$ ……(答)