$x = t + \dfrac{1}{t}$ とする．$t > 0$ のとき，$x \geqq 2$ であることを示せ．また，関数

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2a\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t > 0)$$

の最小値と，そのときの x の値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(20 長崎大 経済・環境・水産 1(3))

【答】 証明略.

$a \leqq 2$ のとき，$x = 2$ で，最小値 $2 - 4a$ をとり，

$a > 2$ のとき，$x = a$ で，最小値 $-a^2 - 2$ をとる．

【解答】

$$x = t + \frac{1}{t} \iff t^2 - xt + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

t が $t > 0$ の範囲で動くときの x の値域は，① を満たす正の数 t が存在するような x の集合である．$f(t) = t^2 - xt + 1$ とおく．$f(0) = 1$ であることに注意すると，求める x の条件は

$$\begin{cases} \text{軸}: \dfrac{x}{2} > 0 \\ \text{頂点の } y \text{ 座標}: f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \dfrac{x^2}{4} \leqq 0 \end{cases}$$

整理して

$$x \geqq 2 \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

を得る．

- $t > 0$ のとき，相加平均・相乗平均の関係を用いることができ

$$x = t + \frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \quad \left(\text{等号は } t = \frac{1}{t} \text{ すなわち } t = 1(> 0) \text{ のとき成立する}\right)$$

であるが，これだけで「$x \geqq 2$」と結論付けるわけにはいかない．

これは x の最小値が 2 であることは示しているが，x が 2 以上のすべての実数を動くことを示してはいない．これを示すには微分 (数学 III) を利用する．

y を $x\left(= t + \dfrac{1}{t}\right)$ で表すと

$$\begin{aligned} y &= t^2 + \frac{1}{t^2} - 2a\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{1}{t} - 2a\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ &= x^2 - 2ax - 2 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2 \end{aligned}$$

$x \geqq 2$ であるから，軸：$x = a$ の位置で場合分けすると，y は

$\boldsymbol{a \leqq 2}$ **のとき，** $\boldsymbol{x = 2}$ **で，最小値** $\boldsymbol{2 - 4a}$ **をとり，**

$\boldsymbol{a > 2}$ **のとき，** $\boldsymbol{x = a}$ **で，最小値** $\boldsymbol{-a^2 - 2}$ **をとる．** ……(答)