放物線 $y=-x^2-2ax+a^2-a-6$ (ただし，a は定数とする) について，以下の問いに答えよ．

(1) 放物線の頂点が第 4 象限にあるとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) 放物線が原点を通るとき，原点以外の放物線と x 軸との共有点の座標を求めよ．
また，その放物線の頂点がどの象限にあるかを答えよ．

(20 北星学園大 2)

【答】

(1) $-\dfrac{3}{2}<a<0$

(2) $a=-2$ のとき，共有点の座標は $(4,\ 0)$ であり，頂点は第 1 象限にある．
$a=3$ のとき，共有点の座標は $(-6,\ 0)$ であり，頂点は第 2 象限にある．

【解答】

$f_a(x)=-x^2-2ax+a^2-a-6$ (a は定数) とおく．

(1) $f_a(x)=-(x+a)^2+2a^2-a-6$ であり，$y=f_a(x)$ の頂点 P_a の座標は

$$\mathrm{P}_a\left(-a,\ 2a^2-a-6\right)$$

である．P_a が第 4 象限にあるときの a の値の範囲は

$$\begin{cases}-a>0\\2a^2-a-6<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<0\\(2a+3)(a-2)<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<0\\-\dfrac{3}{2}<a<2\end{cases}$$

すなわち

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2}<a<0}$$ ……(答)

である．

(2) $y=f_a(x)$ が原点を通るとき，$f_a(0)=0$ であり

$$a^2-a-6=0$$
$$(a+2)(a-3)=0$$
$$\therefore\quad a=-2,\ 3$$

(i) $a=-2$ のとき：
$f_{-2}(x)=-x^2+4x=-x(x+4)$ なので，原点以外の x 軸との共有点の座標は

(4, 0) ……(答)

である．また，$f_{-2}(x)=-(x-2)^2+4$ なので，頂点 $\mathrm{P}_{-2}(2,\ 4)$ は

第 1 象限 ……(答)

にある．

(ii) $a=3$ のとき：

$f_3(x)=-x^2-6x=-x(x+6)$ なので，原点以外の x 軸との共有点の座標は

$$\mathbf{(-6,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，$f_3(x)=-(x+3)^2+9$ なので，頂点 $\mathrm{P}_3(-3,\ 9)$ は

第 2 象限 ……(答)

にある．