a を実数とする．曲線 $C : y = x^2 - 2ax + a^2 - a + 2$ と直線 $l : y = 2x - 1$ は異なる 2 点で交わるとする．

(1) a の値の範囲を求めよ．
(2) C と l の交点のうち x 座標の小さい方を P とする．P の x 座標の最小値とそのときの a の値を求めよ．
(3) C と l の 2 つの交点がともに $x \leqq 3$ の範囲にあるとき，a の値の範囲を求めよ．

(20 滋賀県大 工・環境 1)

【答】

(1) $a > \dfrac{2}{3}$
(2) 最小値 $\dfrac{11}{12}$，$a = \dfrac{17}{12}$
(3) $\dfrac{2}{3} < a \leqq 1$

【解答】

(1) C と l が異なる 2 点で交わるから

$$x^2 - 2ax + a^2 - a + 2 = 2x - 1$$
$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 - a + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

は異なる 2 つの実数解をもつ．x についての 2 次方程式 ① の判別式を D_x とおくと

$$\frac{D_x}{4} = (a+1)^2 - (a^2 - a + 3) = 3a - 2$$

であり，求める a の値の範囲は

$$D_x > 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a > \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ①を満たす実数 x のとり得る値の範囲は，① を満たす実数 a が存在するような実数 x の集合である．① を a について整理すると

$$a^2 - (2x+1)a + x^2 - 2x + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

であり，a についての 2 次方程式 ①$'$ の判別式を D_a とおくと

$$D_a = (2x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 3) = 12x - 11$$

である．実数 a が存在する条件は

$$D_a \geqq 0 \qquad \therefore \quad x \geqq \frac{11}{12}$$

である．$x = \dfrac{11}{12}$ のとき，a の値は

$$a = \frac{2 \cdot \frac{11}{12} + 1}{2} = \frac{17}{12}$$

である．$a = \dfrac{17}{12} \left(\neq \dfrac{2}{3} \right)$ のとき，① は異なる 2 つの実数解 x をもち，$x = \dfrac{11}{12}$ は ① の実数解の最小値であるから，$x = \dfrac{11}{12}$ は小さい方の解の最小値でもある．

したがって，P の x 座標は

$$\boldsymbol{a = \frac{17}{12}} \text{ のとき, 最小値 } \boldsymbol{\frac{11}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- ①の小さい方の解は

$$x = a + 1 - \sqrt{3a-2} \quad \left(a > \frac{2}{3}\right)$$

であり，x を a で微分 (数学 III) して，最小値を求めてもよい．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{da} &= 1 - \frac{3}{2\sqrt{3a-2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3a-2}-3}{2\sqrt{3a-2}} \\ &= \frac{12a-17}{2\sqrt{3a-2}(2\sqrt{3a-2}+3)}\end{aligned}$$

増減表は右表となる．

a	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\cdots$	$\frac{17}{12}$	$\cdots$
$\frac{dx}{da}$		$-$	0	$+$
x		$\searrow$	$\frac{11}{12}$	$\nearrow$

よって $a = \frac{17}{12}$ のとき，x は

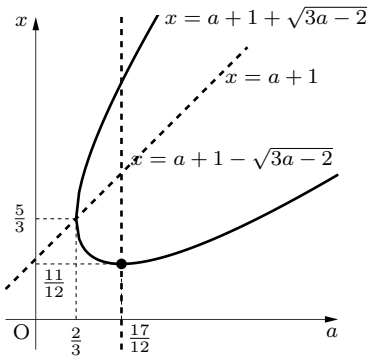
最小値 $\frac{11}{12}$

をとる．

- ①, すなわち

$$x = a + 1 \pm \sqrt{3a-2}$$

を ax 平面に図示すると右図となる．(2) の解法の参考としてほしい．



(3) C と l の 2 つの交点がともに $x \leqq 3$ の範囲にあることは，① の 2 つの実数解がともに $x \leqq 3$ の範囲にあることであり，その条件は①の左辺を $f(x)$ とすると

$$(*)\begin{cases} D_x > 0 \\ \text{軸} : a + 1 < 3 \\ f(3) \geqq 0 \end{cases}$$

である．

$$f(3) = a^2 - 7a + 6 = (a-1)(a-6)$$

であるから，$(*)$ を整理すると

$$\begin{cases} a > \frac{2}{3} \\ a < 2 \\ a \leqq 1,\ 6 \leqq a \end{cases}$$

となる．以上より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{3} < a \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．