関数 $f(x)=|x+1||x-3|+2x$ について，次の設問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ であるとき，$f(x)$ の最大値と，最大値をとるときの x の値を求めよ．
(2) $f(x)$ の最小値と，最小値をとるときの x の値を求めよ．
(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸との交点の座標をすべて求めよ．
(4) a は定数とする．$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点が 3 点となるときの a の値をすべて求めよ．

(20 秋田県大 システム科技 2)

【答】

(1) 最大値 7，$x=2$
(2) 最小値 -2，$x=-1$
(3) $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$，$\left(2-\sqrt{7},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$
(4) $a=6,\ 7$

【解答】

(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\{-(x-3)\}+2x \\ &= -x^2+4x+3 \\ &= -(x-2)^2+7 \end{aligned}$$

である．この区間での $y=f(x)$ のグラフは上に凸であり，軸 $x=2$ は定義域 $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあるから

$f(x)$ は　$\boldsymbol{x=2}$　のとき，最大値　$\mathbf{7}$　……(答)

をとる．

(2) $x \leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \{-(x+1)\}\{-(x-3)\}+2x \\ &= (x+1)(x-3)+2x \\ &= x^2-3 \end{aligned}$$

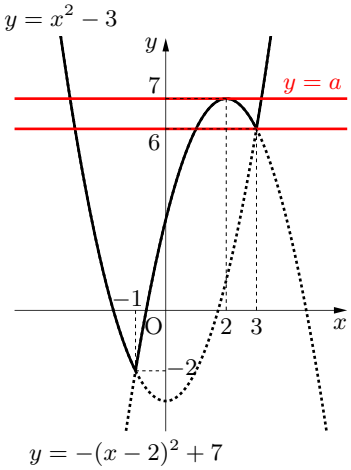
$3 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3)+2x \\ &= x^2-3 \end{aligned}$$

(1) の範囲もあわせると，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになるから

$\boldsymbol{x=-1}$ のとき，最小値 $\mathbf{-2}$　……(答)

をとる．



(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点の座標を求める．
$x \leqq -1$ のとき，$x^2-3=0$ を解いて

$x=-\sqrt{3}$　($x \leqq -1$ を満たす)

$-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，$-(x-2)^2+7=0$ を解いて

$$x = 2-\sqrt{7} \quad (-1 \leqq x \leqq 3 \text{ を満たす})$$

また，$y=f(x)$ のグラフと y 軸の交点の座標は $(0,\ 3)$ である．

以上より，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸との交点の座標は

$$\boldsymbol{(-\sqrt{3},\ 0),\quad (2-\sqrt{7},\ 0),\quad (0,\ 3)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点が 3 点となるのは，(2) のグラフより直線 $y=a$ が点 $(2,\ 7)$，$(3,\ 6)$ を通るとき ((2) の図の赤線) であるから，求める a の値は

$$\boldsymbol{a = 6,\ 7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．