a を定数として，以下の 2 次関数

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+a$$

を考える．

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，そのグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られるグラフを表す関数を $y=g(x)$ とする．このとき，$g(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $h(x)=g(x)-f(x)$ とする．$-1\leqq x\leqq 3$ における $h(x)$ の最大値を M としたとき，M を a を用いて表せ．

(3) $M\leqq 0$ となる a の値の範囲を求めよ．

(20 青森公立大 3)

【答】

(1) $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+(a+2)x-3a-4$

(2) $M=\begin{cases}-6a-7 & (a\leqq -2 \text{ のとき})\\ a^2-2a-3 & (-2\leqq a\leqq 2 \text{ のとき})\\ 2a-7 & (2\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$

(3) $-1\leqq a\leqq \dfrac{7}{2}$

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+a$$

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフを表す式は

$$(-y)=\frac{1}{2}x^2-ax+a$$
$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x^2+ax-a$$

である．さらに，このグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動したグラフを表す式が $y=g(x)$ であるから

$$g(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+a(x-2)-a-2$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{g(x)=-\frac{1}{2}x^2+(a+2)x-3a-4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $h(x)=g(x)-f(x)$ を整理すると

$$\begin{aligned}h(x)&=\left\{-\frac{1}{2}x^2+(a+2)x-3a-4\right\}-\left(\frac{1}{2}x^2-ax+a\right)\\&=-x^2+2(a+1)x-4a-4\\&=-\{x-(a+1)\}^2+(a+1)^2-4a-4\\&=-\{x-(a+1)\}^2+a^2-2a-3\end{aligned}$$

となる．

M は $-1\leqq x\leqq 3$ における $h(x)$ の最大値である．軸 $x=a+1$ の位置で場合分けする．

(i) $a+1 \leqq -1\ (a \leqq -2)$ のとき

$$M = h(-1) = -1 - 2(a+1) - 4a - 4 = -6a - 7$$

(ii) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$M = h(a+1) = a^2 - 2a - 3$$

(iii) $3 \leqq a+1\ (2 \leqq a)$

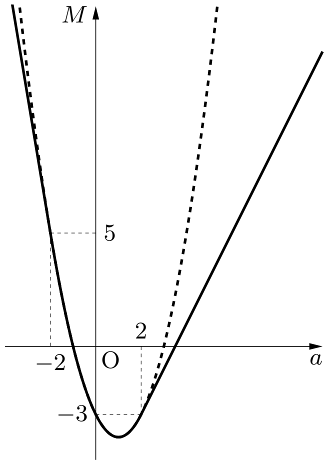
$$M = h(3) = 2a - 7$$

以上 (i)(ii)(iii) より

$$\boldsymbol{M = \begin{cases} -6a-7 & (a \leqq -2 \text{ のとき}) \\ a^2-2a-3 & (-2 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2a-7 & (2 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}}$$ ……(答)

である．

(3) $a=-2$ における M の値は $M=5$，
$a=2$ における M の値は $M=-3$ であり，aM 平面に (2) の結果を図示すると右図となる．



$-2 \leqq a \leqq 2$ の範囲で $M=0$ となるのは

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$
$$\therefore\quad (a-3)(a+1) \leqq 0$$
$$\therefore\quad a = -1$$

また，$2 \leqq a$ の範囲で $M=0$ となるのは

$$2a - 7 = 0 \qquad \therefore\quad a = \frac{7}{2}$$

であるから，$M \leqq 0$ となる a の範囲は

$$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq \frac{7}{2}}$$ ……(答)

である．