

集合  $U$  を  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  とする. また, 2つの集合  $A, B$  を  $U$  の部分集合とする. このとき, 次の条件を満たす組  $(A, B)$  の総数を求めよ. ここで,  $n(S)$  は  $U$  の部分集合  $S$  の要素の個数を表す.

- (1)  $n(A) = 1$  かつ  $n(B) = 2$
- (2)  $n(A) = 3$  かつ  $n(A \cap B) = 1$
- (3)  $U = A \cup B$

(20 北海学園大 工 4・経 2・経 2 部 3)

【答】

- (1) 50
- (2) 120
- (3) 243

【解答】

- (1)  $n(A) = 1$  を満たす集合  $A$  の個数は

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  の 5 個

また,  $n(B) = 2$  を満たす集合  $B$  の個数は

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{4, 5\} \text{ の } {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 個}$$

よって, 求める組  $(A, B)$  の総数は

$$5 \times 10 = \mathbf{50} \text{ 個} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2)  $n(A) = 3$  を満たす集合  $A$  の個数は

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 個}$$

$n(A \cap B) = 1$  を満たす集合  $B$  について考える.

$B$  は,  $A$  に含まれる 3 つの要素のうち 1 つを含み,  $A$  に含まれない 2 つの要素は  $B$  に含まれても含まなくてもよい. これを満たす  $B$  の個数は

$${}_3C_1 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ 個}$$

よって, 求める組  $(A, B)$  の総数は

$$10 \times 12 = \mathbf{120} \text{ 個} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3)  $A \cup B = U$  となるのは,  $U$  の要素 1, 2, 3, 4, 5 が

$$A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cap B$$

のいずれかに属するときであり, 各要素に対し集合は 3 つの候補がある.

よって, 求める組  $(A, B)$  の総数は

$$3^5 = \mathbf{243} \text{ 個} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- $U = A \cup B$  を満たす組  $(A, B)$  の個数について

- (i)  $n(A) = 0$  のとき

$A$  は空集合  $\emptyset$  の 1 個である. このとき,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  の 1 個であり, 組  $(A, B)$  の個数は

$$1 \times 1 = 1 \text{ 個}$$

(ii)  $n(A) = 1$  のとき

$A$  は  ${}_5C_1 = 5$  個ある。このとき、 $B$  は  $A$  に含まれない 4 個の要素を含み、 $A$  に含まれる 1 個の要素は  $B$  に含まれても含まれなくてもよい。組  $(A, B)$  の個数は

$$5 \times 2 = 10 \text{ 個}$$

(iii)  $n(A) = 2$  のとき

$A$  は  ${}_5C_2 = 10$  個ある。このとき、 $B$  は  $A$  に含まれない 3 個の要素を含み、 $A$  に含まれる 2 個の要素は  $B$  に含まれても含まれなくてもよい。組  $(A, B)$  の個数は

$$10 \times 2^2 = 40 \text{ 個}$$

(iv)  $n(A) = 3$  のとき

$A$  は  ${}_5C_3 = 10$  個ある。このとき、 $B$  は  $A$  に含まれない 2 個の要素を含み、 $A$  に含まれる 3 個の要素は  $B$  に含まれても含まれなくてもよい。組  $(A, B)$  の個数は

$$10 \times 2^3 = 80 \text{ 個}$$

(v)  $n(A) = 4$  のとき

$A$  は  ${}_5C_4 = 5$  個ある。このとき、 $B$  は  $A$  に含まれない 1 個の要素を含み、 $A$  に含まれる 4 個の要素は  $B$  に含まれても含まれなくてもよい。組  $(A, B)$  の個数は

$$5 \times 2^4 = 80 \text{ 個}$$

(vi)  $n(A) = 5$  のとき

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  の 1 個である。このとき、 $B$  は 1, 2, 3, 4, 5 のいずれも含んでも含まなくてもよい。組  $(A, B)$  の個数は

$$1 \times 2^5 = 32 \text{ 個}$$

以上 (i)~(vi) より、組  $(A, B)$  の総数は

$$1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243 \text{ 個}$$