m を整数とする．2 次方程式 $x^2-mx+3m+1=0$ が異なる 2 つの整数解をもつような m は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個ある．そのうち最小の m は $\boxed{\text{イ}}$ であり，そのときの 2 つの解は $x=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする．

(20 上智大 人間科・文・法 2 月 4 日 1(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ
4	-5	-7	2

【解答】

$x^2-mx+3m+1=0$ の異なる 2 つの整数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，α, β は

$$\begin{cases}\alpha+\beta=m\\ \alpha\beta=3m+1\end{cases}$$

を満たす．

$$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)+1$$
$$\therefore\quad (\alpha-3)(\beta-3)=10$$

$\alpha-3<\beta-3$ であるから

$\alpha-3$	-10	-5	1	2
$\beta-3$	-1	-2	10	5

よって

α	-7	-2	4	5
β	2	1	13	8
m	-5	-1	17	13

したがって，

m は全部で **4** 個 あり， ……(答)
最小の m は **-5**， ……(答)
そのときの 2 つの整数解は **-7，2** ……(答)

である．

- $x^2-mx+3m+1=0$ より
$$(x-3)m=x^2+1$$
$x=3$ とすると，$0m=10$ となり不合理である．したがって，$x\fallingdotseq 3$ であり
$$m=\frac{x^2+1}{x-3}=x+3+\frac{10}{x-3}$$
x が整数のとき，m が整数になるのは $\dfrac{10}{x-3}$ が整数の場合で，下表のようになる．

$x-3$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
x	-7	-2	1	2	4	5	8	13
m	-5	-1	-1	-5	17	13	13	17

m は 4 個，最小の m は -5 で，このとき整数解は 2, -7