有理数 $a,\ b$ に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば $a,\ b$ は整数であることを証明せよ．ただし，i は虚数単位である．

(20 千葉大 10)

【答】 略

【解答】

$a,\ b$ は有理数であるから

$$a=\frac{p}{q}\ (p,\ q \text{ は互いに素な整数で } q>0),$$
$$b=\frac{r}{s}\ (r,\ s \text{ は互いに素な整数で } s>0)$$

と表すことができる．

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

であるから，有理数 $a,\ b$ に対して

実部 a^2-b^2 と虚部 $2ab$ が整数ならば $a,\ b$ は整数である

$$\iff \frac{p^2}{q^2}-\frac{r^2}{s^2} \text{ が整数 かつ } 2\frac{p}{q}\frac{r}{s} \text{ が整数ならば } q=1 \text{ かつ } s=1 \text{ である} \qquad \cdots\cdots (*)$$

であり，$(*)$ が成り立つことを証明すればよい．

$$\frac{p^2}{q^2}-\frac{r^2}{s^2}=m\ (m \text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$2\frac{p}{q}\frac{r}{s}=n\ (n \text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．①，$q \neq 0$，$s \neq 0$ より

$$① \iff p^2s^2-q^2r^2=mq^2s^2$$

であり

$$p^2s^2=q^2(ms^2-r^2)$$

と変形される．q^2 は p^2s^2 の約数であるが，$p,\ q$ は互いに素であるから q^2 は s^2 の約数であり

$$q^2 \leqq s^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．同じく

$$q^2r^2=s^2(p^2-mq^2)$$

と変形される．s^2 は q^2r^2 の約数であるが，$r,\ s$ は互いに素であるから s^2 は q^2 の約数であり

$$s^2 \leqq q^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．③，④ より

$$q^2=s^2 \qquad \therefore \quad q=s \quad (\because\ q,\ s \text{ はともに正の数}) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．このとき ② は

$$2\frac{pr}{q^2}=n \iff 2pr=nq^2 \quad (\because\ q \neq 0)$$

である．$p,\ q$ は互いに素であり，$r,\ s(=q)$ も互いに素であるから, q は 2 の約数であり，

$$q=2 \text{ または } 1$$

である．$q=2$ とすると

$$2pr=n2^2 \qquad \therefore \quad pr=2n$$

$p,\ r$ の少なくとも一方は 2 の倍数となるが，これは $p,\ q$ が互いに素であること，$r,\ s(=q)$ が互いに素であることに反する．よって，$q=1$ であり，⑤ とあわせると

$$q=s=1$$

であり，$(*)$ が成り立つ．すなわち，$a,\ b$ は整数である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)