n を自然数とするとき，n^3+2n は 3 の倍数であることを証明せよ．

(20 奈良教大 教育 1(1))

【答】 略

【解答】

連続した 3 整数の積が現れるように式を変形する．

$$\begin{aligned} n^3+2n &= (n^3-n)+3n \\ &= (n-1)n(n+1)+3n \end{aligned}$$

ここで，第 1 項目は連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ であり，$n-1$, n, $n+1$ のいずれか 1 つは 3 の倍数であるから，3 の倍数である．また，第 2 項目の $3n$ も 3 の倍数である．

したがって，n^3+2n は 3 の倍数である． …… (証明終わり)

- 3 で割った余りで場合分けして，各々を調べる．k を整数として

  (i) $n=3k$ のとき

  $$n^3+2n=(3k)^3+2(3k)=3(9k^3+2k)$$

  これは 3 の倍数である．

  (ii) $n=3k\pm1$ のとき

  $$\begin{aligned} n^3+2n &= (3k\pm1)^3+2(3k\pm1) \quad (\text{以下，複号同順}) \\ &= \{27k^3\pm3\cdot9k^2+3\cdot(3k)\pm1\}+2(3k\pm1) \\ &= 3(9k^3\pm9k^2+5k\pm1) \end{aligned}$$

  これは 3 の倍数である．

  (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，n^3+2n は 3 の倍数である．

- 上の解答は合同式を用いると簡潔に表すことができる．以下，3 を法とする合同式で考える．

  (i) $n\equiv0$ のとき

  $$n^3+2n\equiv0^3+2\cdot0=0$$

  (ii) $n\equiv\pm1$ のとき

  $$\begin{aligned} n^3+2n &\equiv (\pm1)^3+2\cdot(\pm1) \quad (\text{以下，複号同順}) \\ &= (\pm1)+(\pm2)=\pm3\equiv0 \end{aligned}$$

  (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，n^3+2n は 3 の倍数である．