

m を整数とする.

- (1) m が 3 の倍数でないならば, $(m+2)(m+1)$ が 6 の倍数であることを示せ.
 (2) m が奇数ならば, $(m+3)(m+1)$ が 8 の倍数であることを示せ.
 (3) $(m+3)(m+2)(m+1)$ が 24 の倍数でないならば, m が偶数であることを示せ.

(20 東北大 後理 2)

【答】 略

【解答】

- (1) m が 3 の倍数でないとき, $m = 3k \pm 1$ (k は整数) と表せる. よって

$$m = 3k + 1 \text{ のとき, } m + 2 = 3(k + 1)$$

$$m = 3k - 1 \text{ のとき, } m + 1 = 3k$$

いずれの場合も $(m+2)(m+1)$ は 3 の倍数である.

さらに, 連続する整数 $m+1, m+2$ のうち一方は偶数であるから, $(m+2)(m+1)$ は偶数でもある.

ゆえに, $(m+2)(m+1)$ は 6 の倍数である. …… (証明終わり)

- (2) m が奇数のとき, $m = 2k + 1$ (k は整数) とおける. このとき

$$\begin{aligned} (m+3)(m+1) &= (2k+4)(2k+2) \\ &= 4(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

連続する 2 整数の積 $(k+1)(k+2)$ は偶数であるから, $(m+3)(m+1)$ は 4 と 2 の倍数の積であり, 8 の倍数である. …… (証明終わり)

- (3) 与えられた命題の対偶

「 m が奇数ならば, $N = (m+3)(m+2)(m+1)$ は 24 の倍数である」

ことを示す.

m が奇数のとき, (2) より $(m+3)(m+1)$ は 8 の倍数であるから, N も 8 の倍数である.

さらに, 連続する 3 つの整数のうち 1 つは 3 の倍数であるから, N は 3 の倍数でもある.

3 と 8 は互いに素であるから, N は $3 \times 8 = 24$ の倍数である. …… (証明終わり)