循環小数を以下のように表す.

$$0.333\cdots = 0.\dot{3} \qquad 1.432432432\cdots = 1.\dot{4}3\dot{2}$$

次の問いに答えなさい.

(1) 十進法の $0.\dot{1}$ を十進法の分数で表しなさい.
(2) 十進法の $0.\dot{1}\dot{7}$ を十進法の分数で表しなさい.
(3) 十進法の $5.\dot{3}$ を三進法の小数で表しなさい.
(4) 十進法の 0.8 を二進法の小数で表しなさい.

(20 秋田大 教育文化 2)

【答】

(1) $\dfrac{1}{9}$
(2) $\dfrac{17}{99}$
(3) $12.1_{(3)}$
(4) $0.\dot{1}10\dot{0}_{(2)}$

【解答】

(1) $x = 0.\dot{1}$ …… ① とおくと

$$10x = 1.\dot{1} \qquad \cdots\cdots ②$$

であるから，②, ① の辺々をひくと

$$9x = 1 \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{1}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $x = 0.\dot{1}\dot{7}$ ……③ とおくと

$$100x = 17.\dot{1}\dot{7} \qquad \cdots\cdots ④$$

であるから，④, ③ の辺々をひくと

$$99x = 17 \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{17}{99}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $x = 0.\dot{3}$ …… ⑤ とおくと

$$10x = 3.\dot{3} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

であるから，⑥, ⑤ の辺々をひくと

$$9x = 3 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} 5.\dot{3} &= 5 + x \\ &= 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 + 1\cdot \frac{1}{3^1} \\ &= \boldsymbol{12.1_{(3)}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) $x = 0.8$ とおく．

$$
\begin{aligned}
2x &= 1.6 = 1 + 0.6 \\
2^2 x &= 1 \cdot 2 + 1.2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 + 0.2 \\
2^3 x &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0.4 \\
2^4 x &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0.8 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + x
\end{aligned}
$$

辺々2^4 で割ると

$$
x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{x}{2^4}
$$

x への代入を繰り返すと

$$
\begin{aligned}
x &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{x}{2^4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2^8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{x}{2^8}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2^8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

二進法で表すと

$$
x = 110011001100\cdots_{(2)} = 0.\dot{1}10\dot{0}_{(2)}
$$

- $0.8 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

  分母分子を二進法で表すと

  $$
  \frac{4}{5} = \frac{100}{101}_{(2)}
  $$

  二進法による割り算を実行すると，右のようになるから

  $$
  0.8 = 0.\dot{1}10\dot{0}_{(2)}
  $$

$$
\begin{array}{r}
0.1100\cdots \\
101\,\overline{)\,100} \\
\underline{101} \\
110 \\
\underline{101} \\
100
\end{array}
$$