7^n を 6 で割った余りは 1 であることを証明したい．

(i) 数学的帰納法を用いて証明せよ．

(ii) 二項定理を用いて証明せよ．

(20 豊橋技科大 1(1))

【答】

(i) 略

(ii) 略

【解答】

(i) (ア) $n=1$ のとき

$$7^1 = 6\times 1+1$$

より，7^1 を 6 で割った余りは 1 である．

(イ) $n=k$ のとき 7^k を 6 で割った余りが 1 であると仮定する．

$$7^k = 6m+1 \quad (m \text{ は整数})$$

と表すことができるから

$$7^{k+1} = 7\times 7^k = 7(6m+1) = 6(7m+1)+1$$

$7m+1$ は整数であるから，$n=k+1$ のときも，7^{k+1} を 6 で割った余りは 1 である．
(ア)，(イ) より，すべての自然数 n について，7^n を 6 で割った余りは 1 である．

…… (証明終わり)

(ii) 二項定理より

$$\begin{aligned} 7^n &= (1+6)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 6^1 + {}_n\mathrm{C}_2 6^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 6^n \\ &= 1 + 6({}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 6^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 6^{n-1}) \end{aligned}$$

k $(1 \leqq k \leqq n)$ が自然数のとき，${}_n\mathrm{C}_k$，6^k は整数であるから，${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 6^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 6^{n-1}$ は整数であり，7^n を 6 で割った余りは 1 である．

…… (証明終わり)

- 合同式 (数学 A) を使うと，以下のように簡潔に証明することができる．

  $7 \equiv 1 \pmod 6$ であるから

  $$7^n \equiv 1^n = 1 \pmod 6$$

  よって，7^n を 6 で割った余りは 1 である．