$f(n)=(n-1)n(n+1)$，$g(n)=n^5-n$ とする．このとき，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 6 の倍数，$g(n)$ は 30 の倍数であることをそれぞれ証明せよ．

(20 長崎大 経済・環境・水産 1(4))

【答】 略

【解答】

$n(n+1)$ は連続する 2 整数の積だから，$n(n+1)$ は 2 の倍数であり，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積だから，$(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数でもある．

2 と 3 は互いに素なので，すべての整数 n に対して，$f(n)=(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数である．

…… (証明終わり)

次に

$$\begin{aligned} g(n) &= n^5-n=n(n^4-1) \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2+1) \end{aligned}$$

まず，$g(n)$ は $(n-1)n(n+1)$ を因数としてもつので 6 の倍数である．以下，k を整数とする．

(i) $n=5k$ のとき，$g(n)=5k(n-1)(n+1)(n^2+1)$ より，$g(n)$ は 5 の倍数である．

(ii) $n=5k+1$ のとき，$g(n)=5kn(n+1)(n^2+1)$ より，$g(n)$ は 5 の倍数である．

(iii) $n=5k-1$ のとき，$g(n)=5k(n-1)n(n^2+1)$ より，$g(n)$ は 5 の倍数である．

(iv) $n=5k\pm 2$ のとき，

$$n^2+1=(5k\pm 2)^2+1=25k^2\pm 20k+5=5(5k^2\pm 4k+1)$$

より，n^2+1 は 5 の倍数なので，$g(n)$ は 5 の倍数である．

(i)〜(iv) より，すべての整数 n に対して，$g(n)$ は 5 の倍数である．

5 と 6 は互いに素なので，すべての整数 n に対して，$g(n)=n^5-n$ は 30 の倍数である．

…… (証明終わり)

- $g(n)$ が 5 の倍数であることは，以下のように示すこともできる．

  $$\begin{aligned} g(n) &= (n-1)n(n+1)(n^2+1) \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2-4+5) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

  第 1 項は連続する 5 整数の積なので，5 の倍数である．第 2 項も $(n-1)n(n+1)$ は整数なので 5 の倍数である．よって，$g(n)$ は 5 の倍数である．