複素数平面上で複素数 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする．正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする．点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする．

(1) 複素数 z_3 を求めよ．
(2) 複素数 z_6 を求めよ．
(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ．

(20 千葉大 8)

【答】

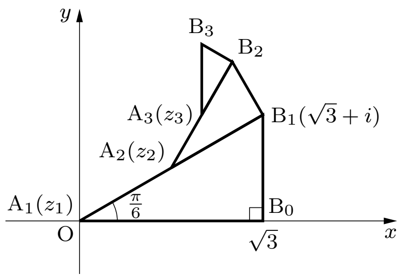
(1) $z_3=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+i$

(2) $z_6=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}+\dfrac{14}{9}i$

(3) z_{6m} の実部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-3\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$，虚部は $\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$

【解答】

(1) 正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点であり，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似である．$\mathrm{A}_1(0)$, $\mathrm{B}_0(\sqrt{3})$, $\mathrm{B}_1(\sqrt{3}+i)$ であるから，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の列は右図のようになる．



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転して $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものである．

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

とおくと

$$z_{n+1}-z_n=\alpha(z_n-z_{n-1}) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．よって

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=(1+\alpha)z_2 \quad (\because\ z_1=0)$$

である．$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}\alpha$ であるから

$$\begin{aligned}
z_3&=(1+\alpha)\cdot\sqrt{3}\alpha=\sqrt{3}(\alpha+\alpha^2)\\
&=\sqrt{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)\right\}\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}+i} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

(2) ① を繰り返し用いると

$$z_{n+1} - z_n = \alpha^{n-1}(z_2 - z_1) = \alpha^{n-1} \cdot \sqrt{3}\alpha = \sqrt{3}\alpha^n \quad (n \geqq 1)$$

であるから

$$\begin{aligned}
z_6 &= z_1 + \sum_{k=1}^{5} \sqrt{3}\alpha^k = 0 + \sqrt{3}\alpha \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} = \sqrt{3}\,\frac{\alpha - \alpha^6}{1-\alpha} \\
&= \sqrt{3}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6\left(\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{9\sqrt{3}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i} = \frac{3 + \frac{2}{9} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \\
&= \frac{\left(\frac{29}{9} + \sqrt{3}i\right)(\sqrt{3} + i)}{3+1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{20}{9}\sqrt{3} + \frac{56}{9}i\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{A_3A_6}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$ 回転して $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ 倍したものであるから

$$z_6 - z_3 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_4 - z_1) = \frac{1+\sqrt{3}i}{6} z_4$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$ 回転して $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ 倍したものであるから

$$\begin{aligned}
z_4 - z_3 &= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2 - z_1) \\
&= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}i
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad z_4 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + i\right) + \frac{1}{3}i = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}i$$

である．よって

$$\begin{aligned}
z_6 &= z_3 + \frac{1+\sqrt{3}i}{6} z_4 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + i\right) + \frac{1+\sqrt{3}i}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}+4i}{3} \\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + i\right) + \frac{-2\sqrt{3}+10i}{6 \cdot 3} \\
&= \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i
\end{aligned}$$

である．

(3) 正の整数 m に対して

$$
\begin{aligned}
z_{6m} &= z_1 + \sum_{k=1}^{6m-1} \sqrt{3}\alpha^k = 0 + \sqrt{3}\alpha \frac{1-\alpha^{6m-1}}{1-\alpha} = \sqrt{3}\frac{\alpha - \alpha^{6m}}{1-\alpha} \\
&= \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{6m}\left(\cos\frac{6m\pi}{6} + i\sin\frac{6m\pi}{6}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3m}(-1)^m}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i} \\
&= \frac{3 - 6\left(-\frac{1}{27}\right)^m + \sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{\left\{3 - 6\left(-\frac{1}{27}\right)^m + \sqrt{3}i\right\}(\sqrt{3}+i)}{3+1} \\
&= \frac{1}{4}\left\{2\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^m + \left\{6 - 6\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}i\right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1 - 3\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} + \frac{3}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}i
\end{aligned}
$$

である，よって，z_{6m} の

実部は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1 - 3\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}}$，**虚部は** $\boldsymbol{\frac{3}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}}$ ……(答)

である．

- $z_{6m} - z_{6(m-1)}$ は $z_7 - z_1$ を反時計回りに $\frac{\pi}{6} \times \{6(m-1)-1\} = \left(m - \frac{7}{6}\right)\pi$ 回転して $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{6(m-1)-1} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{27}\right)^{m-1}$ 倍したものであるから

$$
\begin{aligned}
z_{6m} - z_{6(m-1)} &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{27}\right)^{m-1}\left\{\cos\left(m - \frac{7}{6}\right)\pi + i\sin\left(m - \frac{7}{6}\right)\pi\right\}(z_7 - z_1) \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{1}{27}\right)^{m-1}\left\{(-1)^m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i(-1)^m\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}(z_7 - 0) \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{27}\right)^{m-1} z_7
\end{aligned}
$$

である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A_6A_7}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{6} \times 5 = \frac{5\pi}{6}$ 回転して $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = \frac{1}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{27}$ 倍したものであるから

$$
\begin{aligned}
z_7 - z_6 &= \frac{\sqrt{3}}{27}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)(z_2 - z_1) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{27}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{27}(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{27}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad z_7 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i\right) - \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{14\sqrt{3}}{27} + \frac{14}{9}i = \frac{14}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)
$$

である．
　$m \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
z_{6m} &= z_6 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) z_7 \sum_{k=2}^{m} \left(-\frac{1}{27}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i) \cdot \frac{14}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right) \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \frac{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^{m-1}}{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)} \\
&= \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i\right) + \frac{7\sqrt{3}}{9}\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) \cdot \frac{27}{28}\left\{-\frac{1}{27} - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} \\
&= \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i\right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)\left\{-\frac{1}{27} - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} \\
&= \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{14}{9}i\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)\left\{-\frac{1}{27} - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} \\
&= \left\{\frac{5\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} + \left\{\frac{14}{9} - \frac{1}{18} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} i \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m + \left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} i \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1 - 3\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} + \frac{3}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\} i
\end{aligned}
$$

である，よって，z_{6m} の

　　実部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1 - 3\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$，　虚部は $\dfrac{3}{2}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{27}\right)^m\right\}$

である．これは $m = 1$ のときも成り立つ．
　($\boxed{3}$(3) の解法を真似たが，計算を減らすことにはならなかった．)