

複素数平面上で $\left| \frac{z+1+i}{z+2} \right| = \sqrt{2}$ を満たす点 z 全体が表す図形を C_1 とし、点 z が C_1 を動くとき $w = -\frac{3}{z}$ で表される点 w が描く図形を C_2 とする。次の問いに答えよ。

- (1) 図形 C_1 を求めよ。
- (2) 図形 C_2 を求めよ。
- (3) 2つの定点 $A(4i)$, $B(-2i)$, および C_1 上の点 $P(\alpha)$, C_2 上の点 $Q(\beta)$ の4点を頂点とする四角形 $APBQ$ の面積を S とする。 S が最大になるように α と β の値を定めよ。
- (4) (3) の S の最大値を求めよ。

(20 宇都宮大 工・地デ・農 5)

【答】

- (1) 点 $-3+i$ を中心とする半径 2 の円
- (2) 点 $\frac{3+i}{2}$ を中心とする半径 1 の円
- (3) $\alpha = -5+i$, $\beta = \frac{5+i}{2}$
- (4) $\frac{45}{2}$

【解答】

$$\left| \frac{z+1+i}{z+2} \right| = \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$w = -\frac{3}{z} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

- (1) ① より

$$\begin{aligned} |z+1+i|^2 &= 2|z+2|^2 \\ (z+1+i)(\bar{z}+1-i) &= 2(z+2)(\bar{z}+2) \\ z\bar{z} + (1-i)z + (1+i)\bar{z} + (1+i)(1-i) &= 2(z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4) \\ z\bar{z} + (3+i)z + (3-i)\bar{z} + 6 &= 0 \\ (z+3-i)(\bar{z}+3+i) - (3-i)(3+i) + 6 &= 0 \\ (z+3-i)(z+3-i) &= 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}' \\ \therefore |z+3-i| &= 2 \end{aligned}$$

よって、 C_1 は点 $-3+i$ を中心とする半径 2 の円である。 ……(答)

- (2) ② より、 $w \neq 0$ であり $z = -\frac{3}{w}$ であるから

$$\begin{aligned} \textcircled{1}' &\iff \left| -\frac{3}{w} + 3 - i \right| = 2 \\ |-3 + (3-i)w|^2 &= 4|w|^2 \\ \{(3-i)w - 3\}\{(3+i)\bar{w} - 3\} &= 4w\bar{w} \\ 10w\bar{w} - 3(3-i)w - 3(3+i)\bar{w} + 9 &= 4w\bar{w} \\ 6w\bar{w} - 3(3-i)w - 3(3+i)\bar{w} + 9 &= 0 \\ w\bar{w} - \frac{3-i}{2}w - \frac{3+i}{2}\bar{w} + \frac{3}{2} &= 0 \\ \left| w - \frac{3+i}{2} \right|^2 - \frac{10}{4} + \frac{3}{2} &= 0 \\ \therefore \left| w - \frac{3+i}{2} \right| &= 1 \end{aligned}$$

よって、 C_2 は、点 $\frac{3+i}{2}$ を中心とする半径 1 の円である。 ……(答)

(3) 四角形 APBQ の面積 S は

$$S = \triangle PAB + \triangle QAB$$

であり、 S が最大となるのは、点 $P(\alpha)$ と直線 AB の距離、点 $Q(\beta)$ と直線 AB の距離がどちらも最大となるときである。それはしがつて

$$\alpha = (-3 + i) - 2 = -5 + i \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\beta = \frac{3+i}{2} + 1 = \frac{5+i}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(4) $AB = |4i - (-2i)| = 6$ であり、(3) の α, β と

直線 AB の距離はそれぞれ $5, \frac{5}{2}$ であるから、求める S の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{5}{2} = 15 + \frac{15}{2} = \frac{45}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

