複素数 $z = x + yi$ について，次の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，i は虚数単位とする．

(1) 不等式 $|z+1| \leqq 1$ の表す領域を複素数平面上に図示せよ．

(2) 不等式 $\left|\dfrac{1}{z}+1\right| \leqq 1$ の表す領域を複素数平面上に図示せよ．

(3) (1) の領域と (2) の領域の共通部分の面積を求めよ．

(20 徳島大 理工・医 (保) 1)

【答】

(1) 略

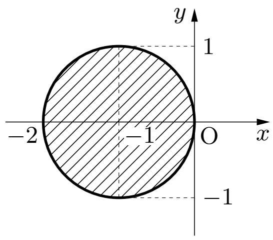
(2) 略

(3) $\dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解答】

(1)
$$|z+1| \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

① は中心 -1，半径 1 の円の周および内部を表すから，求める領域は右図となる．境界も含む．

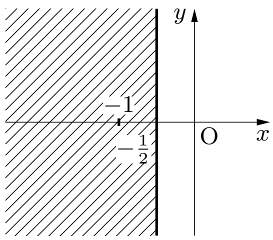


(2)
$$\left|\frac{1}{z}+1\right| \leqq 1 \quad \cdots\cdots ②$$

② を変形すると

$$② \iff \left|\frac{1+z}{z}\right| \leqq 1$$
$$\iff |z+1| \leqq |z|$$

となる．② は 2 点 -1, 0 を結ぶ線分の垂直二等分線を境界とする領域 (半平面) の点 -1 を含む側であるから，右図となる．境界も含む．



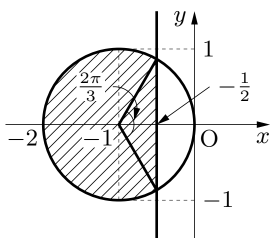
- $z = x + yi$ (x, u は実数) とおくと

$$|(x+yi)+1| \leqq |x+yi|$$
$$|x+1+yi|^2 \leqq |x+yi|^2$$
$$(x+1)^2 + y^2 \leqq x^2 + y^2$$
$$\therefore \quad 2x+1 \leqq 0 \qquad \therefore \quad x \leqq -\frac{1}{2}$$

となる．

(3) (1)，(2) より，① と ② の共通部分は右図の斜線部分である．斜線部分の面積は扇形と三角形の面積の和であり

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \cdots\cdots(答)$$



である．