複素平面上において原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．円 C の外部の点 $\mathrm{P}(w)$ を通る円 C の 2 本の接線の接点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とする．直線 OP と直線 AB の交点を Q とし，Q の実軸に関して対称な点を $\mathrm{R}(z)$ とする．

(1) z を w を用いて表せ．

(2) $z=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{i}{2}$ のときの w の値をそれぞれ γ，δ とする．点 $\mathrm{R}(z)$ が点 $\dfrac{1}{2}$ と点 $\dfrac{i}{2}$ を結ぶ直線上にあるとき，点 $\mathrm{P}(w)$ は原点 O，点 γ，点 δ の 3 点を通る円上にあることを示せ．

(3) 次の ① と ② をつなげた曲線を考える．

① 点 $\dfrac{1}{2}$ と点 $\dfrac{i}{2}$ を結ぶ線分

② 円 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 上で，点 $\dfrac{i}{2}$ と点 $\dfrac{1}{2}$ を端点とし，中心角が $\dfrac{3\pi}{2}$ の弧

点 $\mathrm{R}(z)$ がこの曲線上を点 $\dfrac{1}{2}$ から出発し，① を通って点 $\dfrac{i}{2}$ へ，次に ② を通って点 $\dfrac{1}{2}$ に戻ってくるときの点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡を図示せよ．

(20 札幌医大 4)

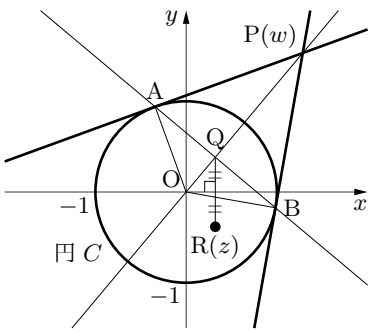
【答】

(1) $z=\dfrac{1}{w}$

(2) 略

(3) 略

【解答】



(1) Q と $\mathrm{R}(z)$ は実軸に関して対称なので，Q を表す複素数は $\overline{z}$ である．

また，$\triangle\mathrm{OAQ} \backsim \triangle\mathrm{OPA}$ なので

$$\mathrm{OA}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}:\mathrm{OA}$$

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OP}=\mathrm{OA}^2$$

$$\therefore\quad |\overline{z}||w|=1 \quad (\because\ \mathrm{OA}=1)\ \cdots\cdots ①$$

また，3 点 O，Q，P はこの順に一直線に並ぶので

$$\overline{z}=\frac{|\overline{z}|}{|w|}w=\frac{1}{|w|^2}w \quad (\because\ ①)$$

$$=\frac{1}{w\overline{w}}w=\frac{1}{\overline{w}}$$

が成り立つから

$$\boldsymbol{z=\frac{1}{w}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 点 $\mathrm{R}(z)$ は 2 点 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{i}{2}$ を結ぶ直線上にあるから，実数 t を用いて

$$z=\frac{1}{2}+t\left(\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

と表すことができる．

$$
\begin{aligned}
③ &\iff 2z = 1 + t(i-1) \\
&\iff \frac{2z-1}{i-1} \text{ は実数} \\
&\iff \frac{2z-1}{i-1} = \overline{\left(\frac{2z-1}{i-1}\right)}
\end{aligned}
$$

さらに，式を整理すると

$$
\begin{aligned}
&(-i-1)(2z-1) = (i-1)(2\overline{z}-1) \\
\therefore\quad &2(1+i)z + 2(-1+i)\overline{z} - 2i = 0 \\
\therefore\quad &(1+i)z - (1-i)\overline{z} - i = 0
\end{aligned}
$$

② を代入し，式を整理すると

$$
\begin{aligned}
&(1+i)\frac{1}{w} - (1-i)\frac{1}{\overline{w}} - i = 0 \\
\iff &\begin{cases} (1+i)\overline{w} - (1-i)w - iw\overline{w} = 0 \\ w \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

上式を変形すると

$$
\begin{aligned}
&(i-1)\overline{w} - (i+1)w + w\overline{w} = 0 \quad (\because \text{ 辺々に } i \text{ をかけた}) \\
&w\overline{w} - (1-i)\overline{w} - \overline{(1-i)}w = 0 \\
&|w-(1-i)|^2 = |1-i|^2 \\
\therefore\quad &|w-(1-i)| = \sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

w は点 $1-i$ を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円周上の点である．

ここで，$z = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{i}{2}$ のときの w の値 γ，δ は，(1) より $w = \dfrac{1}{z}$ であるから

$$
\gamma = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \delta = \frac{1}{\frac{i}{2}} = -2i
$$

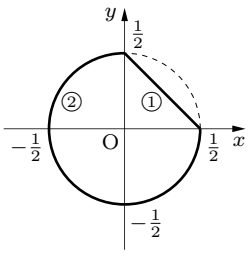
である．④ の左辺に 0，γ，δ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&|0-(1-i)| = |-1+i| = \sqrt{2}, \\
&|\gamma-(1-i)| = |1+i| = \sqrt{2}, \\
&|\delta-(1-i)| = |-1-i| = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

である．0，γ，δ は方程式 ④ を満たすから，点 $\mathrm{P}(w)$ は原点 O，点 γ，点 δ を通る円上にあることが示された．

…… (証明終わり)

(3) 線分 ① と円弧 ② をつなげた曲線は右図となる．



(i) 点 $\mathrm{R}(z)$ が線分 ① 上を動くとき

(2) より点 $\mathrm{P}(w)$ は円 ④ 上を動く．z の偏角は

$$
0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{2}
$$

であり，$\arg w = \arg \dfrac{1}{z} = -\arg z$ であるから

$$
0 \geqq \arg w \geqq -\frac{\pi}{2}
$$

である．

(ii) 点 $\mathrm{R}(z)$ が円弧 ② 上を動くとき

z は

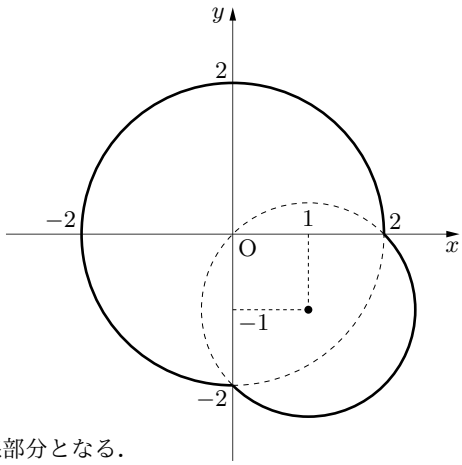
$$\begin{cases} |z| = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq 2\pi \end{cases}$$

を満たす．$z = \dfrac{1}{w}$ より点 $\mathrm{P}(w)$ は

$$\begin{cases} \left| \dfrac{1}{w} \right| = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \leqq \arg \dfrac{1}{w} \leqq 2\pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} |w| = 2 \\ -\dfrac{\pi}{2} \geqq \arg w \geqq -2\pi \end{cases}$$

である．



(i)，(ii) より，点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡は右図の実線部分となる．