実数 t に対して複素数 $z=\dfrac{-1}{t+i}$ を考える．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) 絶対値 $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ．

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ．

(20 東北大 理系 5)

【答】

(1) 実部：$\dfrac{-t}{t^2+1}$，　虚部：$\dfrac{1}{t^2+1}$

(2) $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

(3) 略

【解答】

(1) 実数 t に対して

$$z=\frac{-1}{t+i}=\frac{-(t-i)}{t^2-i^2}=\frac{-t}{t^2+1}+\frac{i}{t^2+1}$$

であり，z の

実部は $\boldsymbol{\dfrac{-t}{t^2+1}}$，　虚部は $\boldsymbol{\dfrac{1}{t^2+1}}$　……(答)

である．

(2) (1) より，求める絶対値は

$$\begin{aligned}\left|z-\frac{i}{2}\right|&=\left|\frac{-t}{t^2+1}+\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)i\right|\\&=\frac{1}{2(t^2+1)}\left|-2t+(1-t^2)i\right|\\&=\frac{1}{2(t^2+1)}\sqrt{4t^2+(1-t^2)^2}\\&=\frac{\sqrt{(t^2+1)^2}}{2(t^2+1)}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$　……(答)

である．

- (1) を無視して，$z-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-1}{t+i}-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-1-ti}{2(t+i)}$ であるから

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{|-1-ti|}{|2(t+i)|}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}$$

(3) (2) の結果から，点 z は中心が $\dfrac{i}{2}$ で半径が $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることが分かる．

$\theta = \arg z$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおき，t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動くときの θ の変域を求める．z の実部を x，虚部を y とおくと，(1) より

$$\begin{cases} x = \dfrac{-t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{1}{t^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{t^2+1} & \cdots\cdots ① \\ x = -ty & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(i) $x = 0$ のとき，② かつ $y \neq 0$ より $t = 0$ であり，① に代入して $y = 1$ である．このとき

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である．

(ii) $x \neq 0$ のとき，② より $t \neq 0$ であり

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{t} \qquad \therefore \quad \tan\theta = -\frac{1}{t}$$

$-1 \leqq t \leqq 1$ $(t \neq 0)$ のとき

$$-\frac{1}{t} \geqq 1 \text{ または } 1 \leqq \frac{1}{t}$$

であるから

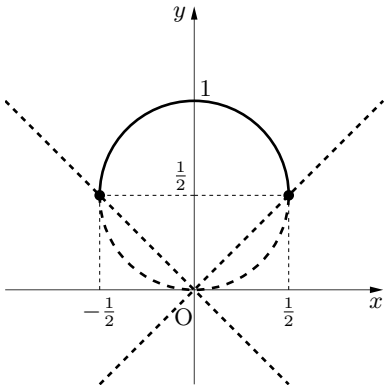
$$\tan\theta \geqq 1 \text{ または } -1 \geqq \tan\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$$

(i)，(ii) より，θ は

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$$

の範囲を動く．よって，z の描く図形は右図の太実線部分である．



- $z = x + yi$ (x, y は実数) とするとき，(1) から実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの点 z の描く図形は

$$(*) \begin{cases} x = \dfrac{-t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{1}{t^2+1} \\ -1 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

を満たす実数 t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$(*) \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{t^2+1} \\ x = -ty \\ -1 \leqq t \leqq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{t^2+1} \\ t = -\dfrac{x}{y} \quad (\because\ y \neq 0) \\ -1 \leqq -\dfrac{x}{y} \leqq 1 \end{cases}$$

$y > 0$ より，求める x, y の条件は

$$\begin{cases} y\left\{\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1\right\} = 1 \\ -y \leqq -x \text{ かつ } -x \leqq y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = y \\ y \geqq x \text{ かつ } -x \leqq y \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ y \geqq x \text{ かつ } y \geqq -x \end{cases}$$

- (1) より

$$\begin{aligned} z-\frac{i}{2} &= \frac{-t}{t^2+1}+\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)i \\ &= \frac{-t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}i \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}i\right) \end{aligned}$$

$t=\tan\dfrac{\varphi}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\varphi}{2}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\tan\dfrac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}=\sin\varphi,$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}=\cos\varphi$$

であるから

$$z-\frac{i}{2}=\frac{1}{2}(-\sin\varphi+i\cos\varphi)$$

$$\therefore\quad z=\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right\}$$

ここで t の動く範囲は $-1\leqq t\leqq 1$ であるから，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\varphi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であり

$$0\leqq\frac{\pi}{2}+\varphi\leqq\pi$$

である．

よって，z は点 $\dfrac{i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の上半円を描く．