i は虚数単位とする．実数 t に対して，複素数

$$w = \frac{1}{1+ti}$$

を考える．w の偏角を $\theta(t)$ $(-\pi \leqq \theta(t) < \pi)$ とする．

(1) t が実数全体を動くとき，複素数平面上の点 w の描く図形を図示せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin\theta(t)}{t}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0} (\cos\theta(t))^{\frac{1}{t^2}}$ を求めよ．

(20 滋賀医大 3)

【答】

(1) 略

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin\theta(t)}{t} = -1$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0} (\cos\theta(t))^{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

【解答】

$$w = \frac{1}{1+ti} \ (t \text{ は実数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\theta(t) = \arg w \ (-\pi \leqq \theta(t) < \pi)$$

(1) ① を変形する．

$$① \iff (1+ti)w = 1 \iff tiw = 1 - w$$

$w \neq 0$ が確認されるから

$$① \iff t = \frac{1-w}{wi}$$

である．t は実数全体を動くから

$$\frac{1-w}{wi} = \overline{\left(\frac{1-w}{wi}\right)} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．これを変形すると

$$② \iff \begin{cases} -\overline{w}i(1-w) = wi(1-\overline{w}) \\ w \neq 0 \end{cases}$$

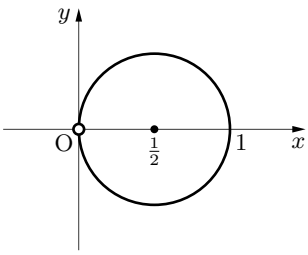
$$\therefore \begin{cases} 2w\overline{w} - w - \overline{w} = 0 \\ w \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \left(w - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ w \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ w \neq 0 \end{cases}$$

を得る．

よって，w の描く図形は右図となる．原点は除く．



- $$w=\frac{1-ti}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2}i$$
とかけるので，点 $w=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおくと
$$(*)\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t^2}\\ y=-\dfrac{t}{1+t^2}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t^2}\\ y=-tx\end{cases}$$
第 1 式より $x\neq 0$ であるから
$$(*)\iff\begin{cases}t=-\dfrac{y}{x} & \cdots\cdots ㋐\\ x=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{y}{x}\right)^2} & \cdots\cdots ㋑\end{cases}$$
であり，点 w の描く図形は ㋐, ㋑ を満たす実数 t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．すなわち，$x\neq 0$ かつ ㋑ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合である．$x\neq 0$ のもとで ㋑ を変形すると
$$x\left\{1+\left(-\frac{y}{x}\right)^2\right\}=1$$
$$x^2+y^2=x\qquad\therefore\quad\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
よって
$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}\\ x\neq 0\end{cases}$$
が求める図形である．これを図示すると解答の図を得る．

(2) $|w|=\dfrac{1}{1+t^2}\cdot\sqrt{1+(-t)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ より
$$w=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}i\right)$$
とかける．w の偏角が $\theta(t)$ であるから
$$\cos\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad\sin\theta(t)=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\qquad\cdots\cdots ③$$
である．
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\theta(t)}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\boldsymbol{-1}\qquad\cdots\cdots(答)$$
である．

(3) ③ より
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(\cos\theta(t))^{\frac{1}{t^2}}&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{\frac{1}{t^2}}\\&=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t^2)^{\frac{1}{t^2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$
である．