座標平面上に 4 点 $P_0(2,\ 0)$，$P_1(0,\ 2)$，$Q_0(0,\ 0)$，$Q_1(-1,\ 1)$ がある．正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める．

四角形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ と四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 P_nQ_n のみを共有する．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) P_2，Q_2 の座標を求めよ．
(2) P_4，P_8 の座標を求めよ．
(3) 正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ．

(20 千葉大 3)

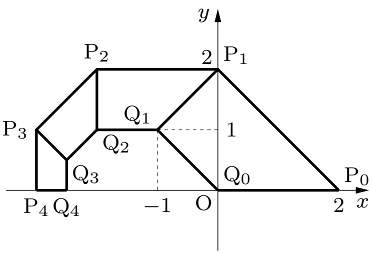
【答】

(1) $P_2(-2,\ 2)$，$Q_2(-2,\ 1)$
(2) $P_4(-3,\ 0)$，$Q_8\left(-\dfrac{7}{4},\ 0\right)$
(3) $P_{8m}(4^{1-2m}-2,\ 0)$

【解答】

(1) 四角形 $P_1P_2Q_2Q_1$ と四角形 $P_0P_1Q_1Q_0$ は相似であり，かつ辺 P_1Q_1 のみを共有する．$P_0(2,\ 0)$，$P_1(0,\ 2)$，$Q_0(0,\ 0)$，$Q_1(-1,\ 1)$ であるから，四角形 $P_1P_2Q_2Q_1$ と四角形 $P_0P_1Q_1Q_0$ の相似比は

$$\begin{aligned} P_1Q_1 : P_0Q_0 &= \sqrt{2} : 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \end{aligned}$$



である．したがって，四角形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ は四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものであり，2 つの四角形は辺 P_nQ_n のみを共有するから，四角形の列は上図のようになる．

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ は $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものであるから，$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ は $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi,\ \sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ を $\dfrac{n-1}{4}\pi$ 回転し大きさを $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 倍したものである．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{n-1}P_n} &= 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{n-1}{4}\pi\right),\ \sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{n-1}{4}\pi\right)\right) \\ &= (\sqrt{2})^{4-n}\left(\cos\frac{n+2}{4}\pi,\ \sin\frac{n+2}{4}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．同じく

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_{n-1}Q_n} &= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{n-1}{4}\pi\right),\ \sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{n-1}{4}\pi\right)\right) \\ &= (\sqrt{2})^{2-n}\left(\cos\frac{n+2}{4}\pi,\ \sin\frac{n+2}{4}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

である．① を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} = \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} + \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} + \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \\ &= (2,\ 0) + (\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sin\frac{3}{4}\pi\right) + (\sqrt{2})^2(\cos\pi,\ \sin\pi) \\ &= (2,\ 0) + 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2(-1,\ 0) \\ &= (-2,\ 2) \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{P_2}$ の座標は

$$\mathbf{P_2(-2,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．同じく，② を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} + \overrightarrow{\mathrm{Q_0Q_1}} + \overrightarrow{\mathrm{Q_1Q_2}} \\ &= (0,\ 0) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sin\frac{3}{4}\pi\right) + (\cos\pi,\ \sin\pi) \\ &= (0,\ 0) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1,\ 0) \\ &= (-2,\ 1)\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{Q_2}$ の座標は

$$\mathbf{Q_2(-2,\ 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ③, ① を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_4}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + \overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}} + \overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}} \\ &= (-2,\ 2) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi,\ \sin\frac{5}{4}\pi\right) + \left(\cos\frac{3}{2}\pi,\ \sin\frac{3}{2}\pi\right) \\ &= (-2,\ 2) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0,\ -1) \\ &= (-3,\ 0)\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{P_4}$ の座標は

$$\mathbf{P_4(-3,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_8}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_4}} + \overrightarrow{\mathrm{P_4P_5}} + \overrightarrow{\mathrm{P_5P_6}} + \overrightarrow{\mathrm{P_6P_7}} + \overrightarrow{\mathrm{P_7P_8}} \\ &= (-3,\ 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi,\ \sin\frac{7}{4}\pi\right) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi,\ \sin 2\pi) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{9}{4}\pi,\ \sin\frac{9}{4}\pi\right) + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{5}{2}\pi,\ \sin\frac{5}{2}\pi\right) \\ &= (-3,\ 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}(1,\ 0) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}(0,\ 1) \\ &= \left(-\frac{7}{4},\ 0\right)\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{P_8}$ の座標は

$$\mathbf{P_8}\left(\mathbf{-\frac{7}{4},\ 0}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=(-2,\ 2)-(2,\ 0)=(-4,\ 2)$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}\times 2=\dfrac{\pi}{2}$ 回転し大きさを $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ 倍したものである．複素数平面上で点 $-4+2i$ (i は虚数単位) を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させると

$$(-4+2i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(-4+2i)i=-2-4i$$

であり，$(-4,\ 2)$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したベクトルは $(-2,\ -4)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_4}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}\\&=(2,\ 0)+(-4,\ 2)+\frac{1}{2}(-2,\ -4)\\&=(2,\ 0)+(-4,\ 2)+(-1,\ -2)\\&=(-3,\ 0)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{P_4}(-3,\ 0)$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{P_4P_8}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_4}}=(-3,\ 0)-(2,\ 0)=(-5,\ 0)$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}\times 4=\pi$ 回転し大きさを $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ 倍したものである．$(-5,\ 0)$ を反時計回りに π 回転したベクトルは $(5,\ 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_8}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0P_4}}+\overrightarrow{\mathrm{P_4P_8}}\\&=(2,\ 0)+(-5,\ 0)+\frac{1}{4}(5,\ 0)\\&=\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{P_8}\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$$

である．

(3) $k\ (1\leqq k\leqq m)$ が正の整数のとき，$\overrightarrow{\mathrm{P_{8(k-1)}P_{8k}}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_8}}=\left(-\dfrac{7}{4},\ 0\right)-(2,\ 0)=\left(-\dfrac{15}{4},\ 0\right)$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}\times 8(k-1)=2(k-1)\pi$ 回転し大きさを $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8(k-1)}=\dfrac{1}{2^{4(k-1)}}$ 倍したものである．$\left(-\dfrac{15}{4},\ 0\right)$ を反時計回りに $2(k-1)\pi$ 回転したベクトルは $\left(-\dfrac{15}{4},\ 0\right)$ であるから，$m\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_{8m}}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2^{4(k-1)}}\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)\\&=(2,\ 0)+\frac{1-\left(\dfrac{1}{16}\right)^m}{1-\dfrac{1}{16}}\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)\\&=(2,\ 0)+\frac{16}{15}\,\frac{16^m-1}{16^m}\left(-\frac{15}{4},\ 0\right)\\&=\left(2-\frac{4(16^m-1)}{16^m},\ 0\right)\\&=\left(\frac{4}{16^m}-2,\ 0\right)\\&=(4^{1-2m}-2,\ 0)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\mathrm{P}_{8m}(4^{1-2m}-2,\ 0)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- 問題文に「正の整数 m に対して」とあるが，これは $m=0$ のときも成り立つ．