次の条件により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(20 札幌医大 1(2))

【答】 $a_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$

【解答】

$$a_1 = \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

数学的帰納法により，すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ が確認される．② の辺々の逆数をとることができる．

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 - a_n}{a_n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2\frac{1}{a_n} - 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n} - 1\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1} - 1 = 3 - 1 = 2$ ($\because$ ①)，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_n} = 2^n + 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{2^n + 1}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．