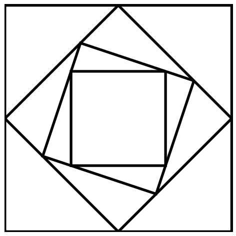
1 辺の長さが 1 の正方形の面積を S_0 とする．右図に示すように，この正方形の各辺を 1 : 1 に内分する 4 点を頂点とする正方形を作り，その面積を S_1 とする．さらに，新しくできた正方形の各辺を 2 : 1 に内分する 4 点を頂点とする正方形を作り，その面積を S_2 とする．次に面積 S_2 の正方形の各辺を 3 : 1 に内分する 4 点を頂点とする正方形を作り，その面積を S_3 とする．以下，同様にこの操作を n 回行った後にできる正方形の面積を S_n とする．



ア．面積 S_2 を求めよ．
イ．面積 S_n と S_{n-1} の関係を表す漸化式を求めよ．

(20 豊橋技科大 1(2))

【答】

ア．$\dfrac{5}{18}$

イ．$S_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}S_{n-1} \quad (n \geqq 1 \text{ のとき})$

【解答】

ア．面積 S_n の正方形の 1 辺の長さを l_n とおくと

$$l_0 = 1$$

であり，l_n は S_{n-1} の各辺を $n : 1$ 内分する 4 点を頂点とする正方形の 1 辺の長さであるから

$$l_n{}^2 = \left(\frac{n}{n+1}l_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}l_{n-1}\right)^2$$

$$\therefore \quad l_n{}^2 = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}l_{n-1}{}^2 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

を満たす．よって

$$l_1{}^2 = \frac{1^2+1}{(1+1)^2}l_0{}^2 = \frac{2}{4}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad S_2 = l_2{}^2 = \frac{2^2+1}{(2+1)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{18}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

イ．$S_n = l_n{}^2$ と ① より，S_n と S_{n-1} の関係を表す漸化式は

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}S_{n-1} \quad (n \geqq 1 \text{ のとき})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 数列 $\{S_n\}$ は

$$S_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}S_{n-1} & (n \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすから

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n^2+1}{(n+1)^2}S_{n-1} \\
&= \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\frac{(n-1)^2+1}{n^2}S_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\frac{(n-1)^2+1}{n^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2+1}{2^2}S_0 \\
&= \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\frac{(n-1)^2+1}{n^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2+1}{2^2} \quad (\because\ S_0=1)
\end{aligned}$$

$n=0$ を代入すると $\dfrac{0^2+1}{(0+1)^2}=1$ であり，これは $n=0$ のときも成り立つ．よって

$$S_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\frac{(n-1)^2+1}{n^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2+1}{2^2} \quad (n \geqq 0)$$

である．