初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を a_n，初項 1，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項を b_n とし，数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を

$$c_n = \log_2\left(\frac{\log_r b_{n+3}}{\log_r b_{n+1}}\right)$$

で定義する．2 つのベクトル $\overrightarrow{p_n} = (a_n,\ a_{n+1})$，$\overrightarrow{q_n} = (b_n,\ b_{n+1})$ のなす角を θ_n とする．ただし，n は自然数であり，$r > 1$, $0 \leqq \theta_n \leqq \pi$ とする．次の各問に答えなさい．

(1) $r = 2$ とし，ベクトル $\overrightarrow{p_n}$，$\overrightarrow{q_n}$，$\overrightarrow{p_n} - \overrightarrow{q_n}$ の大きさをそれぞれ $|\overrightarrow{p_n}|$，$|\overrightarrow{q_n}|$，$|\overrightarrow{p_n} - \overrightarrow{q_n}|$ とする．

(i) a_n，b_n をそれぞれ n の式で表しなさい．
(ii) $|\overrightarrow{p_n}|$，$|\overrightarrow{q_n}|$ をそれぞれ n の式で表しなさい．
(iii) $\sin\theta_n$，$\cos\theta_n$，$\sin(\theta_n + \theta_{n+1})$，$\cos(\theta_n + \theta_{n+1})$ の値をそれぞれ求めなさい．
(iv) $|\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{q_2}|^2 - |\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{q_1}|^2$ の値を求めなさい．

(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(i) b_n を r と n の式で表しなさい．
(ii) c_n，S_n をそれぞれ n の式で表しなさい．
(iii) $S_n > 1 + \log_2 5$ となる n の最小値を求めなさい．

(20 帯広畜産大 9)

【答】

(1) (i) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$，　$b_n = 2^{n-1}$

(ii) $|\overrightarrow{p_n}| = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$，$|\overrightarrow{q_n}| = 2^{n-1}\sqrt{5}$

(iii) $\sin\theta_n = \dfrac{3}{5}$，$\cos\theta_n = \dfrac{4}{5}$，$\sin(\theta_n + \theta_{n+1}) = \dfrac{24}{25}$，$\cos(\theta_n + \theta_{n+1}) = \dfrac{7}{25}$

(iv) $|\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{q_2}|^2 - |\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{q_1}|^2 = \dfrac{225}{16}$

(2) (i) $b_n = r^{n-1}$

(ii) $c_n = \log_2 \dfrac{n+2}{n}$，$S_n = \log_2 \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

(iii) $n = 4$

【解答】

(1) $r = 2$ のとき

(i) 与えられた条件より

$$\boldsymbol{a_n} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{b_n} = 1 \cdot r^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) $\overrightarrow{p_n} = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}},\ \dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}(2,\ 1)$,　$\overrightarrow{q_n} = (r^{n-1},\ r^n) = 2^{n-1}(1,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p_n}}| = \frac{1}{2^n}\sqrt{2^2 + 1^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2^n}}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{q_n}}| = 2^{n-1}\sqrt{1^2 + 2^2} = \boldsymbol{2^{n-1}\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) 内積の定義より

$$\cos\theta_n = \frac{\overrightarrow{p_n}\cdot\overrightarrow{q_n}}{|\overrightarrow{p_n}||\overrightarrow{q_n}|} = \frac{\dfrac{2^{n-1}}{2^n}(2\times1+1\times2)}{\dfrac{\sqrt{5}}{2^n}\times2^{n-1}\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$0 \leqq \theta_n \leqq \pi$ より，$\sin\theta_n \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta_n = \sqrt{1-\cos^2\theta_n} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

θ_n $(0 \leqq \theta_n \leqq \pi)$ について，$\cos\theta_n$，$\sin\theta_n$ は n によらず一定であるから，$\theta_{n+1} = \theta_n$ であり

$$\sin(\theta_n+\theta_{n+1}) = \sin2\theta_n = 2\sin\theta_n\cos\theta_n = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \boldsymbol{\frac{24}{25}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\cos(\theta_n+\theta_{n+1}) = \cos2\theta_n = 2\cos^2\theta_n - 1 = 2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \boldsymbol{\frac{7}{25}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iv) $\overrightarrow{p_n} - \overrightarrow{q_n} = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 2^{n-1},\ \dfrac{1}{2^n} - 2^n\right)$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{p_n} - \overrightarrow{q_n}|^2 &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 2^{n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} - 2^n\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4^{n-1}} - 2 + 4^{n-1}\right) + \left(\frac{1}{4^n} - 2 + 4^n\right) \\ &= \frac{5}{4^n} + 5\times4^{n-1} - 4\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{q_2}|^2 - |\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{q_1}|^2 &= \left(\frac{5}{16} + 5\times4 - 4\right) - \left(\frac{5}{4} + 5\times1 - 4\right) \\ &= -\frac{15}{16} + 15 = \boldsymbol{\frac{225}{16}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) $\boldsymbol{b_n} = 1\cdot r^{n-1} = \boldsymbol{r^{n-1}}$ ……(答)

(ii) $\boldsymbol{c_n} = \log_2\dfrac{\log_r r^{n+2}}{\log_r r^n} = \boldsymbol{\log_2\dfrac{n+2}{n}}$ であり ……(答)

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+2}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\log_2(k+2) - \log_2 k) \\ &= \log_2(n+2) + \log_2(n+1) - \log_2 1 - \log_2 2 \\ &= \boldsymbol{\log_2\frac{(n+2)(n+1)}{2}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) (ii) より

$$\begin{aligned}&S_n > 1 + \log_2 5 \\ &\log_2\frac{(n+2)(n+1)}{2} > \log_2(2\cdot5) \\ &(n+2)(n+1) > 2\cdot10 \\ &n^2 + 3n - 18 > 0 \\ &(n+6)(n-3) > 0 \\ \therefore\ \ &n < -6 \text{ または } 3 < n\end{aligned}$$

これを満たす最小な自然数は

$$\boldsymbol{n = 4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．